

Л. И. КАДАНЕР

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОЛИЗЕРАХ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛИТЕРАТУРЫ ПО ЧЕРНОЙ И ЦВЕТНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ

Х а р ь к о в 1 9 5 9

АННОТАЦИЯ

В книге описаны методы построения и расчета полей постоянных токов применительно к расчетам электролизеров. Изложены результаты экспериментального исследования и приведены расчеты полей, наиболее часто встречающихся при выделении металлов из водных растворов и при электролизе расплавленных сред. Рассмотрены вопросы влияния включений на электропроводность электролитов и распределения тока на электродах, а также влияния микрорельефа на распределение тока на электродах. Кратко охарактеризована роль магнитных полей в мощных электролизерах.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников предприятий, специалистов, работающих в проектных и научно-исследовательских институтах, а также на студентов старших курсов, специализирующихся в области электрометаллургии и электрохимии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	5
Глава I. Электрическое поле в электролизере и методы его исследования	7
1. Экспериментальные методы исследования полей	14
2. Графический метод построения картины поля	22
3. Метод потенциальной сетки	24
4. Аналитические методы решения задач поля	29
5. Моделирование при исследовании электролизеров	42
Глава II. Поле плоских параллельных электродов	52
1. Поле прямоугольного электролизера с плоскими электродами, перекрывающими все сечение электролита	53
2. Поле плоских полубесконечных электродов	54
3. Поле плоских электродов конечных размеров	60
4. Неравномерность распределения тока, вызванная падением потенциала в теле плоских параллельных электродов	73
Глава III. Комбинации цилиндрических и плоских электродов	79
1. Поле параллельно расположенных линейных электродов	79
2. Поле линейного и плоского электродов	80
3. Поле линейного электрода, расположенного между двумя плоскими электродами	83
4. Поле кругового цилиндрического и бесконечного плоского электродов	85
5. Электроды — круговой цилиндр и две пластины, расположенные у стенок прямоугольного электролизера	89
6. Поле комбинаций цилиндрических электродов	96
7. Поле горизонтальных плоских электродов, разделенных полукруговой перегородкой	98

	Стр.
Глава IV. Поле алюминиевого электролизера	102
1. Распределение тока на электродах	103
2. Падение напряжения в электролите	117
Глава V. Электроды — коаксиальные цилиндры	121
Задача центровки коаксиальных цилиндров	126
Глава VI. Влияние включений на электропроводность электролита и распределение тока на электродах	132
Об оптимальном расстоянии между электродами	140
Глава VII. Влияние микрорельефа на распределение тока на элект- родах	142
Глава VIII. Магнитные поля в электролизерах	147
Глава IX. Наложение макро- и микрополей при цементационных процессах	157
Литература	161

ВВЕДЕНИЕ

Характер электрического поля в электролизере, распределение в нем потенциала и тока оказывает существенное влияние на протекание электрохимических процессов в гидроэлектрометаллургии, при электролизе расплавленных сред, в гальваностегии и других электрохимических производствах.

Электродные процессы в гидроэлектрометаллургии и при электролизе расплавленных сред протекают нормально только в определенном диапазоне плотностей тока. Из-за неравномерности распределения плотность тока на отдельных участках катода может быть чрезмерно повышена. В результате при электрокристаллизации металла могут образоваться дендриты, губка, наросты, которые, разрастаясь, вызывают короткое замыкание ячеек или осыпаются, переходя в шлам, что приводит к понижению выхода металла по току. При применении жидкого катода, например в случае получения сплавов кальция со свинцом или с цинком, лимитирующим является допустимый верхний предел плотности тока. При чрезмерно большой плотности тока выделяющийся на жидком свинце (или цинке) кальций не успевает продиффундировать вглубь катода и образовать с ним сплав. Металл в поверхностном слое насыщается выделяемым кальцием и, отделяясь от катода, будет всплывать на поверхность более тяжелого электролита и реагировать с хлором, образуя хлорид кальция.

При чрезмерном повышении плотности тока на отдельных участках анодов, например при рафинировании меди или никеля, будет достигнут потенциал, при котором в раствор переходят ионы благородных металлов. Это приведет к повышению их потери.

Распределение тока на электродах оказывает существенное влияние на процесс электрохимического производства щелочей и хлора. Соотношение потенциалов выделения кислорода и хлора на аноде заметно изменяется при изменении плотности тока; соответственно изменяется и выход по току. От плотности тока зависит скорость разрушения анодов, а также характер получаемых при электролизе производных хлора и ряда других неорганических соединений.

Особенно важное значение распределение тока имеет в гальваностегии, где от его равномерности зависит расход цветных металлов и электроэнергии, скорость процесса, равномерность блеска при непосредственном нанесении блестящих покрытий, состав и внешний вид осаждаемых сплавов и т. д. Решающую роль играет равномерность при размерном осаждении металла.

Вопросы равномерности распределения тока и металла применительно к гальваностегии в настоящей книге не рассмотрены и должны быть освещены в специальном издании.

Существенным для электролиза расплавленных сред является распределение энергии. При неправильном выборе геометрических и электрических параметров отдельные зоны электролизера могут быть чрезмерно перегреты либо, наоборот, переохлаждены. В первом случае это приведет к понижению выхода по току, во втором может привести к местному отвердеванию электролита. При электролитическом выделении алюминия выбор геометрических и электрических параметров должен обеспечить создание гарниссажа у боковых стенок ванны; в противном случае часть тока будет расходоваться на образование карбида алюминия. Чрезмерный перегрев может вызвать также «науглероживание» электролита.

От распределения тока зависит величина и направление магнитного поля, осложняющего нормальное протекание процесса в современных мощных алюминиевых электролизерах.

Для расчета теплового баланса электролизеров, выбора мощности источников тока, расчета расхода электроэнергии и т. д. необходимо знать величину сопротивления электролита, зависящего от характера распределения тока и потенциала.

В связи с изложенным нам представлялось важным ознакомить читателя с методами исследования электрических полей электролизеров и привести расчетные и экспериментальные данные о наиболее часто встречающихся в практике электрометаллургии полях.

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ЭЛЕКТРОЛИЗЕРЕ И МЕТОДЫ ЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ

При установившемся электрохимическом процессе в электролизере, при протекании постоянных токов, вокруг электролита и внутри него создаются постоянное электрическое и постоянное магнитное поля.

Собственно рассмотрению постоянного электрического поля, от характера которого во многом зависит нормальное протекание электрохимических процессов, и посвящена настоящая книга

Что касается магнитных полей, то и их влияние в отдельных случаях сказывается на работе электролизеров.

Электрическое поле постоянных токов в электролизере характеризуется системой уравнений:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{i} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{i} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (1)$$

где E — напряженность электрического поля;

\vec{i} — плотность тока;

ρ — удельное сопротивление электролита.

Из уравнения $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ следует, что

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (2)$$

где φ — потенциал электрического поля;

$\operatorname{grad} \varphi$ — вектор, декартовы компоненты которого равны $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$:

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3)$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — единичные векторы, направленные соответственно вдоль координатных осей x , y , z .

В цилиндрической системе координат компонентами $\operatorname{grad} \varphi$ служат соответственно $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Из (2) и (3) следует, что составляющие вектора напряженности по осям координат

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4)$$

Из уравнения $\text{div} \vec{i} = 0$ и из закона Ома $\vec{i} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ вытекает уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Электрический ток в электролизере протекает вследствие того, что к электродам приложена некоторая разность потенциалов. Естественно, что потенциалы анода и катода имеют различные значения. Поскольку основной характеристикой поля является его напряженность в каждой точке, то, как видно из (2) и (3), к потенциалу поля может быть добавлена произвольная постоянная слагаемая, т. е. потенциал поля определяется с точностью до постоянной. Это дает возможность выбрать начало отсчета потенциала в любой точке поля. Обычно при расчете для удобства принимают равным нулю потенциал катода. Каждая точка электролита при этом будет характеризоваться своим, совершенно определенным значением потенциала φ . Это значение потенциала будет зависеть от положения точки в пространстве.

Поверхность, во всех точках которой потенциал одинаков, называется эквипотенциальной поверхностью. Если все величины, характеризующие поле, зависят только от двух координат (x, y), то такое поле называют плоскопараллельным. В сечении эквипотенциальных поверхностей плоскостями, параллельными плоскости xy , получают линии, называемые эквипотенциальными линиями.

При бесконечно малом смещении из точки, находящейся на некоторой эквипотенциальной поверхности, изменение потенциала равно:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi \cdot \vec{dr}, \quad (6)$$

где \vec{dr} — вектор смещения.

Если смещение происходит вдоль эквипотенциальной поверхности, то $d\varphi = 0$. Отсюда следует, что вектор $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, так как скалярное произведение $\text{grad } \varphi \cdot \vec{dr} = 0$.

Если смещение происходит по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону увеличения потенциала по направлению вектора $\text{grad } \varphi$, то, с одной стороны, $d\varphi = |\text{grad } \varphi| |\vec{dr}|$, а с другой, — $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} |\vec{dr}|$, где $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — производная по нормали. Отсюда следует, что $|\text{grad } \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Итак, вектор напряженности поля в каждой точке направлен по нормали к эквипотенциальной по-

верхности, проходящей через эту точку, и равен по величине $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (рис. 1).

Поскольку в каждой точке вектор \vec{E} определен однозначно, то через эту точку проходит только одна эквипотенциальная поверхность. В частности, это означает, что эквипотенциальные поверхности, как и эквипотенциальные линии, не могут пересекаться.

В каждой точке поля мы можем построить элементы нормалей dn к поверхности равного потенциала. Все эти элементы будут образовывать систему линий, к которым в каждой точке будут касательны векторы напряженности \vec{E} . Эти линии представляют собой силовые линии, или иначе линии тока.

Таким образом, поле электролизера можно для наглядности представить расслоенным рядом эквипотенциальных поверхностей, которые пронизаны системой силовых линий.

Обычно эквипотенциальные поверхности проводят так, чтобы потенциалы соседних линий отличались на одну и ту же конечную величину, которую выбирают сообразно с желаемой точностью чертежа.

Следует указать, что при построении поля густота силовых линий должна соответствовать величине напряженности. Это требование будет выполнено, если при построении провести трубки, через которые протекают одинаковые токи.

Расчет поля электролизера обычно сводится к выяснению распределения тока на электродах, расчету выделяемой мощности в отдельных зонах электролизера и определению суммарного сопротивления электролитической ячейки для расчета электрического баланса. Для этого должна быть решена задача распределения потенциала в исследуемом поле.

Для решения задачи о нахождении поля в электролизере должны быть заданы граничные условия, т. е. значения потенциала на электродах. В соответствии с теоремой единственности при заданной конфигурации электролизера и заданных значениях потенциала на электродах может быть получено только одно решение задачи о распределении потенциала в электролите (т. е. в исследуемом поле).

Расчет поля сводится к решению дифференциального уравнения Лапласа при заданных граничных условиях.

После нахождения значения потенциала дифференцированием полученного выражения определяют составляющие напряженности по координатным направлениям E_x , E_y и E_z , а за

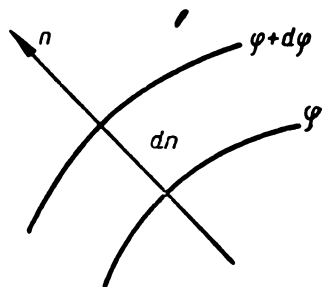


Рис. 1.

тем по формуле $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ находят напряженность поля и плотность тока.

Зная напряженность поля, можно найти дифференциальную мощность $\frac{dw}{dv}$, воспользовавшись соотношением

$$\frac{dw}{dv} = \frac{E^2}{\rho} = \rho i^2. \quad (7)$$

Зная разность потенциалов между электродами и общую силу тока, можно найти сопротивление электролита:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} = R. \quad (8)$$

Поскольку электрическое поле постоянных токов, как и электростатическое поле неподвижных зарядов, является потенциальным, то между соотношениями, характеризующими оба поля, можно провести формальную аналогию. Это позволяет при расчете поля в проводящей среде пользоваться известными методами решения аналогичных задач электростатики.

В частности, формулы для расчета сопротивления электролита R в электролизере могут быть получены из соответствующих формул емкости для электростатического поля аналогичной конфигурации [4]:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\epsilon}{\gamma C}, \quad (9)$$

где G — проводимость;

γ — удельная электропроводность;

ϵ — диэлектрическая проницаемость;

ρ — удельное сопротивление;

C — емкость.

Обычно при расчетах электрического баланса в электролизерах определяют омическое падение напряжения в электролите по формуле

$$\Delta \varphi_{\text{ом}} = IR, \quad (10)$$

где I — общая сила тока, протекающего в электролизере;

R — омическое сопротивление электролита.

Далее определяют среднее значение катодной и анодной плотностей тока, деля общий ток соответственно на площадь поверхности катода и анода. По этим величинам из поляризационных кривых определяют значения потенциалов катода φ_k и анода φ_a .

Падение напряжения в электролизере получают, складывая найденные значения

$$\Delta v = \Delta \varphi_{\text{ом}} + \varphi_a - \varphi_k. \quad (11)$$

Машовец и Форсблом [5, 6] показали, что такой метод расчета, являясь принципиально неверным, может привести к значительным ошибкам.

Омическое сопротивление электролита зависит не только от конфигурации электролизера и удельной электропроводности, но и от поляризуемости обоих электродов. Неравномерное распределение потенциала на поверхности электродов, вызванное неравномерностью распределения тока, приводит к изменению направления линий тока и эквипотенциальных линий и в результате к изменению омического сопротивления. Значения эффективных электродных потенциалов также зависят от характера поля — его равномерности.

Падение напряжения в электролите может быть определено, если известно распределение тока на электродах и сопротивление какой-либо силовой трубки. Так как величина падения напряжения в любом участке, включая величину локальных электродных потенциалов, является постоянной для данного электролизера, то падение напряжения в последнем можно рассчитать по формуле:

$$\Delta u = \Delta \varphi'_{\text{ом}} + \varphi'_a - \varphi'_k, \quad (12)$$

$\Delta \varphi'_{\text{ом}}$ — омическое падение напряжения в трубке;
 φ'_a и φ'_k — локальные значения электродных потенциалов¹.

Изменение потенциала электродов с изменением плотности тока оказывает влияние не только на сопротивление электролита, но и на распределение тока на электродах.

Поляризуемость одного из электродов всегда делает более равномерным распределение тока на этом электроде. Поляризуемость электрода противоположного знака, как показали Машовец и Форсблом [7, 8], в зависимости от конфигурации и взаимного расположения электродов может способствовать как большей, так и меньшей равномерности распределения тока на первом электроде. Однако это влияние количественно намного меньше влияния поляризуемости первого электрода.

Влияние поляризуемости электродов зависит от электропроводности растворов. Повышение электропроводности всегда увеличивает положительное действие поляризуемости электрода на равномерность распределения на нем тока. В то же время повышение электропроводности увеличивает как положительное, так и отрицательное влияние поляризуемости второго электрода. Однако, так как роль поляризуемости второго электрода всегда значительно меньше, то можно считать, что повышение электропроводности практически всегда положительно влияет на равномерность распределения тока на электродах [9].

В общем случае при количественной оценке влияния поляризации на распределение тока, например на поверхности катода, можно пренебречь влиянием поляризуемости второго электрода (т. е. анода). В таком случае можно положить, что падение потенциала в электролизере Δu складывается из омического падения

¹ Если можно пренебречь падением напряжения в теле электродов.

потенциала в растворе $\Delta\varphi_{\text{ом}}$ и падения потенциала на границе электрод-электролит. Последняя величина складывается из равновесного значения электродного потенциала φ_p , концентрационной поляризации $\varphi_{\text{кц}}$ и химической поляризации φ_x :

$$\Delta u = \Delta\varphi_{\text{ом}} + \varphi_p + \varphi_{\text{кц}} + \varphi_x. \quad (13)$$

Для сопоставления влияния каждого из них воспользуемся результатами работы Левича [10]. Найдем соответствующие эффективные сопротивления для всех составляющих [13]. Эффективное сопротивление нелинейной цепи ω равно $\frac{\partial u}{\partial i}$.

Дифференцируя (13), найдем:

$$\omega = \frac{\partial \Delta\varphi_{\text{ом}}}{\partial i} + \frac{\partial \varphi_{\text{кц}}}{\partial i} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial i} = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2. \quad (14)$$

Распределение потенциала в растворе определится наибольшим из трех слагаемых. Так, в электролизерах сравнительно больших размеров при большом междуэлектродном расстоянии, а также в электролитах с низкой электропроводностью омическое сопротивление сравнительно велико и будет практически определять в большинстве случаев распределение потенциала и тока в электролизере.

Влияние концентрационной поляризации может быть велико при значениях плотности тока i , близких к предельным $i_{\text{пр}}$. При $i \ll i_{\text{пр}}$ величиной ω_1 можно пренебречь, так как она значительно меньше ω_2 . Для этого случая, если ограничиться рассмотрением влияния только одного катода, можно написать:

$$\Delta\varphi_{\text{к}} = \varphi_p + \varphi_x(i), \quad (15)$$

где $\Delta\varphi_{\text{к}}$ — скачок потенциала на границе катод-электролит.

$\Delta\varphi_{\text{к}}$ можно представить как разность потенциалов между металлом $\varphi_{\text{м}}$ (который можно считать постоянным, если пренебречь падением потенциала в теле электрода) и раствором у поверхности катода:

$$\Delta\varphi_{\text{к}} = \varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{к}}; \quad (16)$$

следовательно, (16) можно записать в виде

$$\varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{к}} = \varphi_p + \varphi_x \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right), \quad (17)$$

где $i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — градиент потенциала в точке поверхности катода.

Поскольку $\varphi_x(i)$ представляет собой нелинейную функцию своего аргумента, нахождение распределения потенциала представляет весьма сложную задачу.

Зависимость химической поляризации от плотности тока может быть выражена формулой:

$$\varphi_x = \frac{RT}{\alpha F} \ln \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) + a, \quad (18)$$

где F — число Фарадея;

a — постоянная;

α — величина, которая для многих реакций весьма близка к 0,5.

Сопоставив (17) и (18), получим:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \exp \left\{ \frac{F}{2RT} (\varphi_m - \varphi_k - \varphi_p - a) \right\}. \quad (19)$$

Предположим, что на протяжении электрода длиной L потенциал раствора мало изменяется по сравнению с величиной $\frac{2RT}{F}$. Тогда

$$\varphi_k = \bar{\varphi}_k^{(0)} + \varphi, \quad (20)$$

где $\bar{\varphi}_k^{(0)}$ — потенциал в средней точке катода;

φ — отклонения потенциала катода от его значения в средней точке.

Если пренебречь величиной φ , то

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \exp \left\{ \frac{F}{2RT} (\varphi_m - \bar{\varphi}_k^{(0)} - \varphi_p - a) \right\} = i_0. \quad (21)$$

Таким образом, в нулевом приближении плотность тока на всей поверхности электрода можно считать постоянной.

В следующем приближении

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = i_0 + \left(\frac{\partial i_0}{\partial \varphi_k} \right) \varphi. \quad (22)$$

Уравнение (22) представляет собой линейные граничные условия, которым должен удовлетворять потенциал. Такая замена нелинейных условий линейными, естественно, облегчает решение задачи о распределении потенциала и тока.

Представим (22) в безразмерном виде, положив $\xi = \frac{n}{L}$, где ξ — безразмерная координата:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = i_0 L \rho + \left(\frac{\partial i_0}{\partial \varphi_k} \right) L \rho \varphi. \quad (23)$$

Обозначив $L \rho \frac{\partial i_0}{\partial \varphi_k} = H$, найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = i_0 L \rho + H \varphi. \quad (24)$$

Очевидно, что безразмерная величина H определяет влия-

ние поляризации на изменение потенциала и плотности тока вдоль поверхности электрода.

Если размеры катода малы и $L \ll \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial i}$ и соответственно $H \ll 1$, то плотность тока оказывается практически одинаковой на всей поверхности катода. Распределение тока в этом случае контролируется ходом электродного процесса. Поскольку все точки катода в этом смысле совершенно равноправны, плотность тока оказывается постоянной.

Если размеры катода велики $L \gg \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial i}$ и соответственно $H \gg 1$, то потенциал сохраняет практически постоянное значение по всей поверхности катода. В этом случае распределение тока практически не зависит от поляризации.

В общем случае, когда величина L сравнима с $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial i}$, решение уравнения Лапласа связано со значительными затруднениями, даже при допущении о линейной зависимости потенциала от плотности тока.

Решение задачи о распределении потенциала с учетом поляризации весьма сложно даже для простейших конфигураций электродов; аналитическое же решение задачи при условии $\varphi_k = \text{const}$ также возможно только для электролизеров сравнительно несложных геометрических форм.

Для расчетов полей сложных конфигураций в электротехнической практике получил применение графический метод построения картины поля. Этот метод применительно к расчету поля электролизеров, т. е. с учетом поляризации, получил дальнейшее развитие в работах Г. В. Форсблома [11]. Отметим, что построение картины поля при помощи графического метода требует значительной затраты времени даже при известном навыке.

Для приближенного решения уравнения Лапласа в электротехнических и теплотехнических расчетах применяется метод сеток, который также отличается большой трудоемкостью. Этот метод может быть успешно использован при применении счетных машин.

Для построения картины поля используют экспериментальные методы, к числу которых относятся: метод стальных опилок, метод окрашенных струй, метод стального листа, метод измерения емкости в высокочастотном поле и метод электролитической ванны.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЕЙ

Одним из первых экспериментальных методов, применявшихся для построения поля, был метод исследования поля при помощи стальных опилок [4], который позволяет получать только направление линий тока.

В электротехнической практике получил применение метод

стального листа [3]. Из тонкого железного листа вырезают модель исследуемого поля и пропускают ток так, чтобы участки входа и выхода линий тока соответствовали границам исследуемого поля. С помощью шупа и компенсационной схемы находят эквипотенциальные линии и затем линии тока. Метод стального листа позволяет получать количественную характеристику поля, однако точность результатов в большой степени зависит от равномерности листа по толщине и однородности материала.

В электротехнике, в гидро- и аэродинамике для исследования полей применяют также метод окрашенных струй [12]. Суть метода заключается в том, что через моделируемое поле пропускают поток жидкости и одновременно с общим потоком с помощью пипеток через всю исследуемую область пропускают окрашенные струи, которые могут быть сфотографированы. Тем самым фиксируются линии тока. Для этой цели применяют воду, глицерин, масло; в качестве красителей — перманганат калия, тушь, анилиновые красители.

В течение последних лет был разработан метод исследования электрических полей путем измерения емкости в высокочастотном поле [13].

Из экспериментальных методов наиболее широкое применение получил метод электролитической ванны, обеспечивающий наибольшую точность. Возможности этого метода в последнее время были расширены путем применения конформно-преобразованных моделей, что позволило для экспериментального исследования использовать электроды [14] более простых форм.

Метод зондирования в электролитической ванне для исследования полей электролизеров был успешно использован Люкенсом [15], Федотьевым и Евстюхиным [16] и впоследствии развит В. Машовцом [17].

На рис. 2 изображена схема установки, предложенной Н. П. Федотьевым и А. И. Евстюхиным [16].

Электролизер — прямоугольная ванна из зеркального стекла — заполнялся электролитом на высоту в 10 мм. Горизонтальное положение ванны обеспечивалось при помощи регулировочных винтов мраморной подставки.

Катод 1 и анод 2 подключали к рабочей цепи, состоявшей из источника тока 9, рубильника 5, реостата R и амперметра A . Помимо того, для измерения падения напряжения на ванне к цепи был подключен вольтметр V .

Измерительная цепь состояла из двух электролитических агар-агаровых ключей (зондов) 4, соединенных последовательно с каломельными полуэлементами 3, чувствительного гальванометра 7 и телеграфного ключа 6. В процессе измерения один из зондов перемещали в электролите в горизонтальном направлении, до тех пор, пока стрелка гальванометра не приходила в нулевое положение. При этом оба зонда находились в точках с одинаковым значением потенциала. Координаты этих точек опреде-

ляли с помощью миллиметровой бумаги, наклеенной на прозрачное дно ванны. Оставляя неподвижным один из зондов и передвигая другой, находили ряд точек равного потенциала, что позволяло вычертить эквипотенциальную кривую.

При построении поля эквипотенциальные линии вычерчивают таким образом, чтобы разность потенциалов между соседними линиями была постоянной величиной. Поэтому для определения значения потенциала в отдельных точках поля вводят еще одну измерительную цепь, включающую катод 1, зонд 4, коломельный полуэлемент 3 и потенциометр 8.

Линии тока вычерчивают перпендикулярно эквипотенциальным линиям. При этом следует учесть, что поверхность электро-

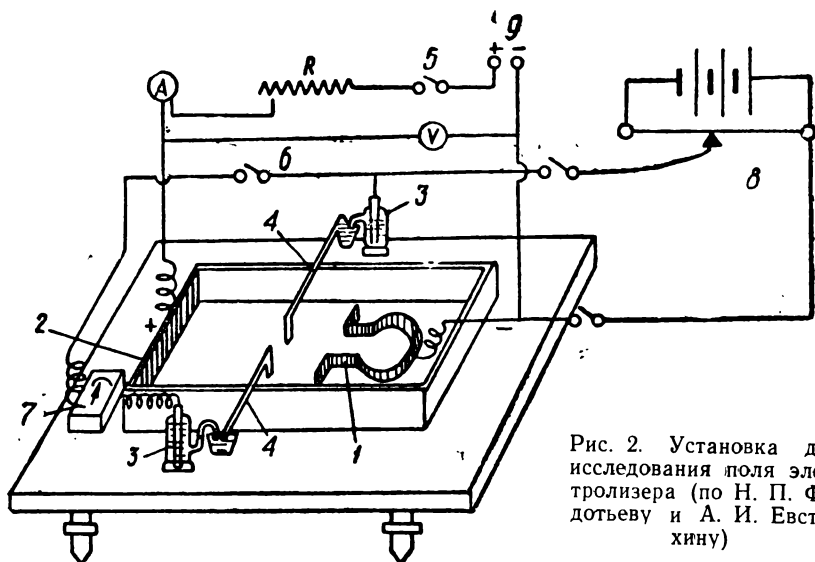


Рис. 2. Установка для исследования поля электролизера (по Н. П. Федотьеву и А. И. Евстюхину)

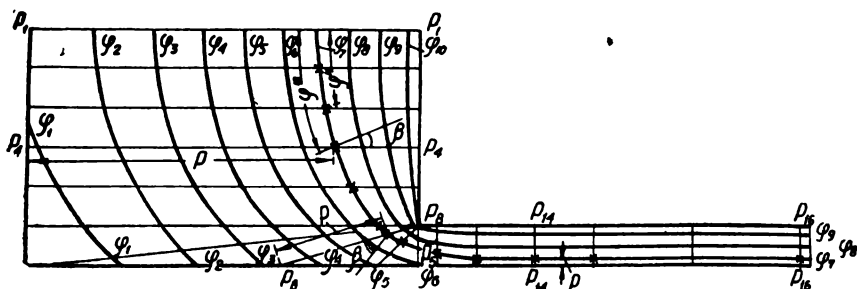


Рис. 3. Построение потенциальных линий поля (по В. П. Машовцу)

дов не будет эквипотенциальной из-за неравномерности распределения тока и зависимости потенциала от плотности тока.

В. П. Машовец [17] развил метод количественной обработки результатов экспериментального исследования поля.

Вначале в отдельных точках электролита вдоль линий разрезов, примерно совпадающих с направлением линий тока, определяют значение потенциала по отношению к одному из электродов (рис. 3) с помощью потенциометра и зонда, соединенного с полупроводником.

Далее для всех разрезов строят кривые изменения потенциала по длине разреза (рис. 4) и определяют расстояния от начала

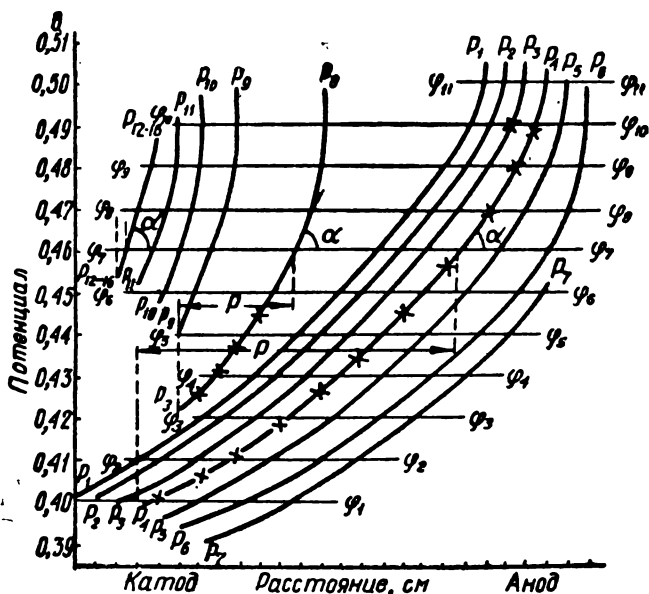


Рис. 4. Кривые изменения потенциала вдоль разрезов (по В. П. Машовцу)

разрезов до точек пересечения их с линиями равных потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и т. д., причем $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_3 = \dots = \varphi_{n-1} - \varphi_n$. Затем переносят найденные точки на рис. 3 и вычерчивают эквипотенциальные линии и перпендикулярные им линии тока.

В точках пересечения кривых p с линиями уровня проводят касательную и определяют тангенс угла α (рис. 4), равный производной $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ в точке пересечения. Градиент потенциала в этой точке

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial l} \cdot \frac{1}{\cos \beta}, \quad (1)$$

где β — угол между линией разреза p и нормалью к эквипотенциальной линии φ .

Для большей наглядности можно развернуть эквипотенциальные линии в прямые и построить кривые изменения $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ вдоль эквипотенциальных линий (рис. 5). Так как

$$I = \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (2)$$

(где I — сила тока и ρ — удельное сопротивление электролита), то очевидно, что заштрихованная площадь пропорциональна силе тока. При этом равновеликие

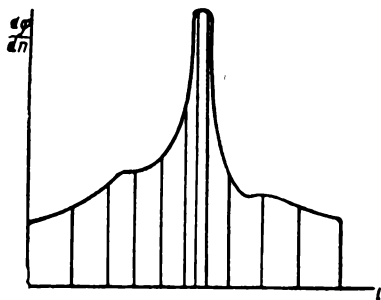


Рис. 5. Распределение градиента потенциала вдоль эквипотенциальной линии (развертка). Площадь диаграммы разделена на равновеликие участки

площадки, ограниченные нормальными к развертке эквипотенциальной линии, будут представлять собой силовые трубки, несущие одинаковый ток. Переноса точки пересечения указанных нормалей с разверткой на эквипотенциальные линии (см. рис. 3) и соединяя их, получаем силовые линии, которые экстраполируем до электродов.

Чтобы определить распределение мощности в различных зонах электролита, можно воспользоваться выражением для удельной мощности:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} \right)^2, \quad (3)$$

где v — объем электролита;

w — мощность.

Мощность, выделяющаяся в какой-либо силовой трубке, $w = I \Delta \varphi$, где I_l — сила тока, текущая по трубке; $\Delta \varphi$ — падение напряжения в электролите рассматриваемой силовой трубки.

Если все рассматриваемое поле электролизера разбито на n силовых трубок, то полная мощность, развиваемая в электролизере

$$w_0 = \sum_{w=1}^{w=n} w = I_l \sum_1^n \Delta \varphi. \quad (4)$$

Зная силу тока I и определив мощность w_0 , можно определить сопротивление электролита в электролизере:

$$R = \frac{w_0}{I^2}. \quad (5)$$

Для получения исходных данных для построения поля можно воспользоваться автоматическим устройством. Так, в установке,

сконструированной Гудиным [18], один из электродов-зондов устанавливали неподвижно, а другой передвигали вдоль линии разреза. Разность потенциалов между зондами измеряли с помощью катодного вольтметра. На зеркало гальванометра направляли пучок света от осветителя. Отклонение зайчика гальванометра фиксировалось на фотобумаге, укрепленной на бара-

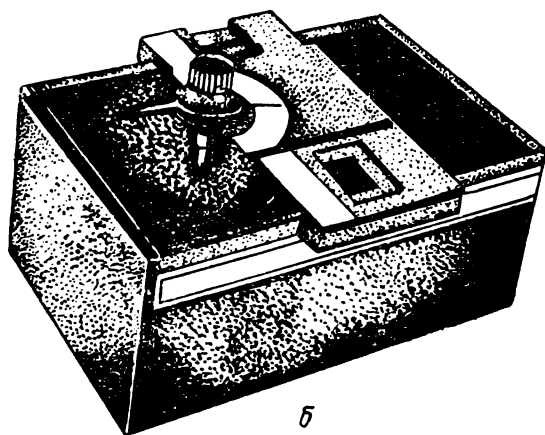
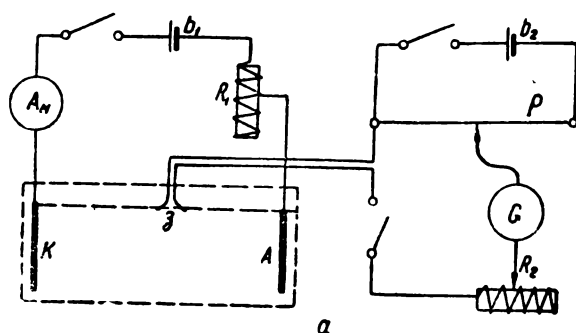


Рис. 6. Схема и фото установки для исследования поля электролизера (по И. Штейнеру)

бане, который вращался синхронно с передвижением зонда. Такая синхронизация давала возможность получать непосредственно на фотобумаге кривые потенциал — длина разреза.

Штейнеру [19] удалось ускорить построение картины поля. Для этого в предложенной им установке (рис. 6) был использован двойной зонд, представляющий собой две тонкие металлические проволоочки, отстоящие одна от другой на постоянном фиксированном расстоянии. Зонд укреплен во вращающемся вертикальном держателе, ось которого строго центрирована относительно обеих проволоочек зонда. Держатель вместе с зондами мо-

жет перемещаться вдоль и поперек электролизера при помощи двух взаимно перпендикулярных подвижных салазок.

Разность потенциалов между зондами измеряли с помощью обычной компенсационной схемы.

Для определения направления эквипотенциальных и силовых линий зонд вращают вокруг вертикальной оси. Положение зонда, при котором разность потенциалов равна нулю, соответствует направлению эквипотенциальной линии. Положение, при котором разность потенциалов между зондами принимает наибольшее значение, соответствует направлению силовых линий. Измерение

максимальной разности потенциалов одновременно позволяет определить напряженность и плотность тока в исследуемой точке поля. Для этого зонды должны быть предварительно откалиброваны в однородном поле.

Если ограничить задачу исследования определением плотностей тока на электродах, то можно использовать установку, предложенную нами [20, 9]. Схема этой установки изображена на рис. 7.

В исследуемом электролизере электрод, распределение тока на котором подлежит изучению, делается составным — из отдельных пластинок, которые набираются в специальные оправки из органического стекла или другого непроводящего материала. Между пластинками сохраняется незначительный зазор (~ 1 мм). Каждую пластинку зажимают в оправке

Рис. 7. Схема установки для непосредственного определения плотности тока на электродах

с помощью контактирующего винта. Пластины, расположенные соответственно с поставленной задачей исследования, помещают вертикально в электролизер. Тыльную сторону пластинок-катодов изолируют с помощью химически стойкого лака. При необходимости можно частично изолировать и лицевую сторону пластины. К каждой пластинке ток подводят отдельно от коммутатора K (см. рис. 7).

При помощи группы переключателей коммутатора или группового переключателя и амперметра A_2 поочередно измеряют ток на каждой пластинке. Посредством реостата R_1 поддерживают постоянным суммарный ток на всех электродах, измеряемый амперметром A_1 . Для того чтобы исключить влияние падения напряжения в амперметре A_2 и тем самым обеспечить подачу равных потенциалов на все электроды, в сеть включен компенсирующий реостат R_2 . Момент компенсации фиксируется гальванометром G .

Измерив силу тока на каждом электроде (пластинке) при

постоянной суммарной силе тока, получают картину распределения тока.

В отдельных случаях более нагруженный участок составного электрода целесообразно собирать из пластинок с меньшей поверхностью. Это обеспечивает большую точность измерений.

При необходимости оправку из непроводящего материала из-

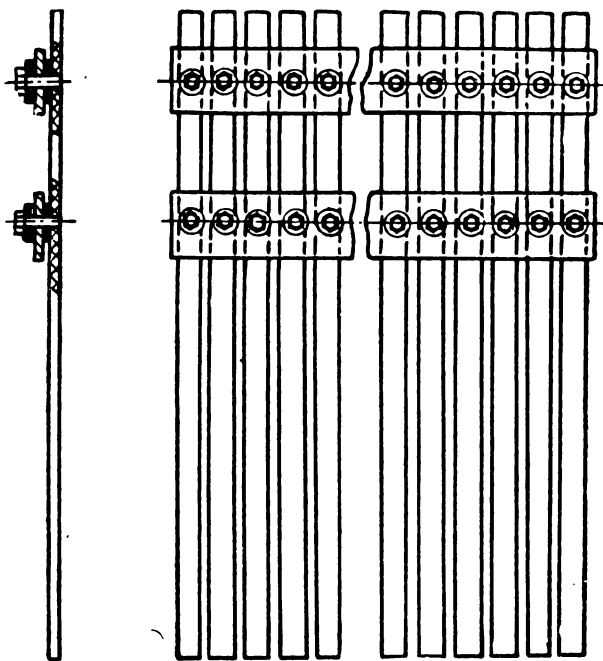


Рис. 8. Схема крепления пластинок

готовляют составной таким образом, чтобы она в нескольких местах могла изгибаться под определенным углом.

В качестве оправки, на которую набирают электроды, могут служить также две гибкие параллельно расположенные полосы из стальной, латунной или медной жести. В полосах просверливают отверстия, отстоящие одно от другого на строго одинаковом расстоянии. Эти отверстия служат для крепления к полосам узких катодных прямоугольных пластинок одинакового размера. Схема крепления изображена на рис. 8. К тыльным сторонам нескольких пластинок приварены петли. С помощью стяжек, прикрепляемых к петлям, полосам, а вместе с ними набору пластинок придается необходимая форма. Эту операцию удобнее выполнить с помощью шаблона из непроводящего материала, вокруг которого стягивают полосы. В результате набор пластинок будет в целом представлять собой цилиндрическую поверхность, в основании которой лежит окружность, эллипс, парабола или другая фигура.

2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАРТИНЫ ПОЛЯ

В графическом методе построения картины поля используется известное свойство эквипотенциальных поверхностей и векторов напряженностей пересекаться под прямыми углами. В случае двухмерной задачи, когда вдоль одного из координатных направлений картина поля не меняется, система эквипотенциальных и силовых линий должна образовать сетку ортогональных криволинейных координат.

Для практического построения удобно выбрать такие расстояния между линиями, чтобы при их пересечении образовывались «криволинейные квадраты».

Основой для построения поля служат проводники, поверхность которых принимается эквипотенциальной, и ограничивающие электролизер изоляторы (стенки электролизера), границы которых с электролитом совпадают с линиями тока (силовыми линиями).

Целесообразно начинать построение поля в области, где можно предположить однородность поля или более или менее точно предугадать его форму, а также в области поля, где предполагается наибольшая концентрация силовых линий. Эта область будет максимально заполнена криволинейными квадратами, причем их взаимное расположение будет мало зависеть от других областей.

При построении картины поля следует учитывать, что линии симметрии, перпендикулярные к проводникам (электродам), являются силовыми линиями. Линии симметрии, не подходящие к электродам, представляют собой эквипотенциальные линии. Следует также учесть, что силовые линии всегда несколько выпучиваются, если на них смотреть со стороны кратчайшей силовой линии.

Ячейки сетки, образованной силовыми и эквипотенциальными линиями, при ее достаточной густоте должны быть приблизительно подобны друг другу. Это условие возникает из требования, чтобы приращение потенциала $\Delta\varphi$ при переходе от одной эквипотенциальной линии к соседней было постоянным и чтобы поле было разделено на трубки равного потока, т. е. чтобы $\Delta\psi = \text{const}$.

Так как напряженность поля

$$E = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial a}, \quad (1)$$

то при достаточно густой сетке можно с достаточной точностью написать:

$$E = - \frac{\Delta \varphi}{\Delta n} = \frac{\Delta \psi}{\Delta a}, \quad (2)$$

где Δn и Δa — средние размеры сетки (см. рис. 9).

При условии $\Delta\varphi = \text{const}$ и $\Delta\psi = \text{const}$

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} = \text{const}, \quad (3)$$

откуда и следует необходимость приблизительного подобия криволинейных квадратов.

Вначале обычно рисуют картину поля на глаз, стремясь удовлетворить условию ортогональности силовых линий к границам проводников (электродов) и вычерчиваемым эквипотенциальным линиям. В результате такого предварительного построения будут получены во многих участках поля не криволинейные квадраты, а прямоугольники. Затем постепенно вносят исправления с тем, чтобы сетка стала квадратной.

При заданном целом числе эквипотенциальных линий число трубок тока может оказаться не целым. В этом случае образуется просвет, не охваченный полем. Естественно, что чем мельче квадраты, тем меньше величина таких просветов, и влияние неточностей будет сведено к минимуму.

В области, где поле слабое, для повышения точности можно проводить дальнейшее разделение полученных квадратов на распространяя его на остальные области поля.

В качестве примера может быть рассмотрено построение поля плоского проводника, согнутого под углом в 90° с бесконечно длинными сторонами (рис. 9). Вначале проводят линию симметрии OM и линию симметрии построения OA . В качестве вероятной силовой линии проводят кривую DCF , которая должна быть нормальной к линии OB , и симметрично расположенную по отношению к линии OA эквипотенциальную линию GCE , перпендикулярную к OM . К тому же обе линии должны пересекаться под прямым углом в точке C , лежащей на линии симметрии OA . Естественно, что отрезок OD должен быть равен отрезку OG . Затем проводят линии BEA и MFA , которые подчиняются таким же условиям; эти линии должны быть проведены так, чтобы образовались криволинейные квадраты $DCEB$, $CFAE$ и $CGMF$. После этого проводят промежуточные силовые и эквипотенциальные линии, разделяя полученные квадраты на меньшие. Если в результате такого разделения получатся криволинейные квадраты, то построение правильно. Если же образуются криволинейные прямоугольники, то построение неверно и его рекомендуется начать снова.

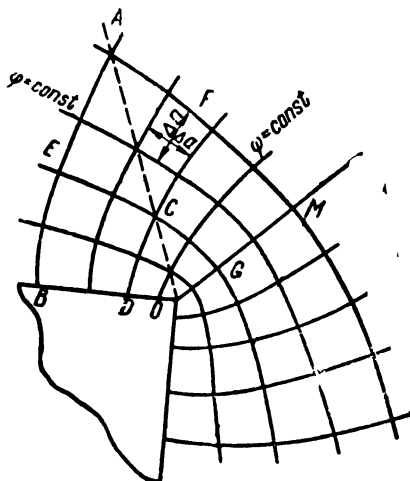


Рис. 9. К графическому методу построения поля

Графический метод может быть использован для построения поля, образованного телами вращения. При этом картину поля вычерчивают в одной из меридианных плоскостей. Общие основания для построения поля остаются теми же — эквипотенциальность контуров, ограничивающих электроды, и ортогональность силовых и эквипотенциальных линий. Условие (3) в этом случае изменяется и принимает вид:

$$\frac{\Delta n}{\Delta a} \cdot \frac{1}{r} = \text{const}, \quad (4)$$

где r — расстояние от середины отрезка Δa до оси вращения.

Если потенциал анода или катода изменяется с плотностью тока, то ограничивающие их контуры не будут эквипотенциальны. В этом случае потенциал не будет задан на границах (контурах электродов) и построение картины поля с помощью обычных приемов не удастся. Метод построения картины поля применительно к указанному случаю, развитый Форсбломом, сводится к тому, что построение поля выполняют в несколько стадий.

Вначале строят поле для случая эквипотенциальности контуров электродов и находят распределение тока на электродах (1-е приближение). Зная плотность тока на каждом участке электрода, из поляризационных кривых находят значения потенциалов на каждом участке, точнее средние значения потенциалов на участках электродов, служащих основанием для трубок тока. Далее строят график распределения потенциала на электродах. При этом удобнее потенциал откладывать в относительных величинах $\varphi_k / \Delta\varphi$ (где φ_k — величина электродного потенциала, $\Delta\varphi$ — падение потенциала в криволинейном квадрате):

$$\Delta\varphi = i_1 \rho, \quad (5)$$

где i_1 — сила тока в трубке.

На полученном графике проводят систему прямых параллельных линий, отстоящих на равных расстояниях одна от другой, и отмечают точки пересечения с кривой распределения потенциала на электроде. Из этих точек проводят линии, перпендикулярные оси l . В результате определяется положение точек на электродах, потенциалы которых отличаются от соседних на одинаковую величину $\Delta\varphi/n$. Эти точки служат основой для вычерчивания эквипотенциальных линий и перпендикулярных к ним линий тока.

3. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СЕТКИ

В практике исследования электрических полей нашел применение метод потенциальной сетки. Он выгодно отличается от графического тем, что применим к полям с любым распределением потенциала на граничных поверхностях. Это особенно важно для расчета полей в электролизерах, в которых потенциал

различных точек граничных поверхностей (электродов) из-за поляризации имеет различное значение.

Сущность метода заключается в том, что дифференциальное уравнение Лапласа заменяется соответствующим ему уравнением в конечных разностях, которое связывает значения искомой функции (потенциала) в дискретно расположенных точках.

Для решения задачи в исследуемой плоскости строят сетку, состоящую из двух систем взаимно перпендикулярных прямых, отстоящих друг от друга на расстоянии a . На полученной сетке вычерчивают контур, который по возможности более точно аппроксимирует исследуемую область поля. После этого, задавшись граничными условиями, решают задачу об определении значения потенциала в точках сетки, используя уравнения в конечных разностях.

Рассмотрим плоскопараллельное поле, в котором построена квадратная сетка с шагом a . Уравнение Лапласа в плоскопараллельном поле примет вид

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Пусть φ_0 — потенциал в некоторой узловой точке O квадратной сетки с координатами x, y ; $\varphi_P, \varphi_Q, \varphi_R, \varphi_S$ — соответственно потенциалы соседних точек с координатами $(x+a, y)$, $(x, y+a)$, $(x-a, y)$ и $(x, y-a)$.

Следовательно

$$\begin{aligned} \varphi_0 = \varphi(x, y); \quad \varphi_P = \varphi(x+a, y); \quad \varphi_Q = \varphi(x, y+a); \quad \varphi_R = \\ = \varphi(x-a, y) \text{ и } \varphi_S = \varphi(x, y-a). \end{aligned} \quad (2)$$

Разложим функции φ_P и φ_R в ряды Тейлора по степеням (при фиксированном значении y):

$$\begin{aligned} \varphi_P = \varphi(x+a, y) = \varphi(x, y) + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\ + \frac{a^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_R = \varphi(x-a, y) = \varphi(x, y) - a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{a^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\ - \frac{a^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Считая a достаточно малым, ограничимся членами ряда третьего порядка относительно a в разложениях (3) и (4). Тогда, складывая (3) и (4), получим:

$$\varphi_P + \varphi_R - 2\varphi_0 = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Аналогичным путем получим:

$$\varphi_Q + \varphi_S - 2\varphi_O = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (6)$$

Складывая (5) и (6) и учитывая (1), получим расчетное уравнение в конечных разностях:

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S - 4\varphi_O = 0. \quad (7)$$

В случае, когда требуется повышенная точность, может оказаться желательным учесть также четвертые производные; однако в практике расчета электролизеров такая необходимость обычно не возникает.

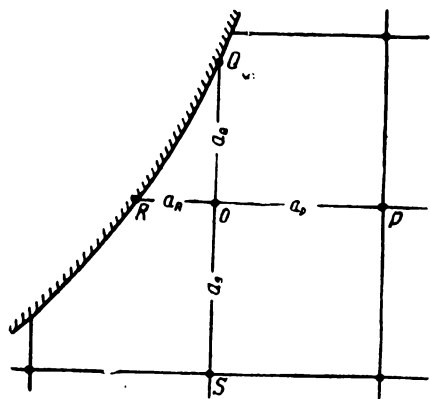


Рис. 10. К расчету двумерного поля по методу потенциальной сетки

При решении задачи методом потенциальной сетки необходимо решить вопрос о выборе размера стороны квадратов, образующих сетку, т. е. о шаге сетки. Теоретически эта величина определяется требованием, чтобы величина погрешности, возникающей при замене дифференциального уравнения (1) разностным (7), не превышала заданной величины. Практически задача решается вначале при малом числе клеток, размер которых определяется на глаз. В дальнейшем переходят к уточнению решения путем измельчения сетки во всей области поля или в какой-нибудь наиболее нагруженной ее части.

Сетку необходимо строить так, чтобы контур, образованный сторонами квадратов, возможно лучше аппроксимировал контур исследуемой области поля. Для получения более точных результатов вблизи криволинейных частей граничных поверхностей можно воспользоваться формулой для сетки с неравными сторонами ячеек, хотя в этом случае, естественно, затруднится расчет.

Если все узловые точки P , Q , R и S сетки находятся на разных расстояниях от точки O (рис. 10), то расчетное уравнение в конечных разностях принимает такой вид [21]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_P + a_R} \left(\frac{\varphi_P - \varphi_O}{a_P} + \frac{\varphi_R - \varphi_O}{a_R} \right) + \\ & + \frac{1}{a_Q + a_S} \left(\frac{\varphi_Q - \varphi_O}{a_Q} + \frac{\varphi_S - \varphi_O}{a_S} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При определении потенциала на границе изолятор-электролит в расчет должны войти не только потенциалы действительного поля, но и потенциалы изображений, например:

$$\varphi_a = \varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S, \quad (9)$$

где точка R — отражение точки S в плоском изоляторе.

Поскольку потенциал отражения от изолятора равен действительному потенциалу, то

$$\varphi_a = \varphi_P + \varphi_Q + 2\varphi_S. \quad (10)$$

После того как сетка построена, проставляют заданные значения потенциала во всех узлах сетки на границах электрод-электролит. Определению подлежат величины потенциалов в остальных узловых точках поля. Если таких точек n , то соответственно можно получить систему из n линейных алгебраических уравнений, содержащих n неизвестных. Решение этой системы значительно облегчается в связи с тем, что большинство коэффициентов при неизвестных равно нулю, поскольку каждое уравнение типа (7) содержит не более пяти неизвестных.

Потенциал какой-либо точки φ_i может быть найден из выражения:

$$\varphi_i = \frac{D_i}{D}, \quad (11)$$

где D — детерминант системы:

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} & . & . & \varphi_{1l} & . & . & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22} & . & . & \varphi_{2l} & . & . & \varphi_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \varphi_{l1}, & \varphi_{l2} & . & . & \varphi_{ll} & . & . & \varphi_{ln} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \varphi_{n1}, & \varphi_{n2} & . & . & \varphi_{nl} & . & . & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \quad (12)$$

D_i представляет собой аналогичное выражение, отличающееся только тем, что столбец коэффициентов при φ_i заменен столбцом свободных членов:

$$D_i = \begin{vmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} & . & . & .a_1 & . & . & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21}, & \varphi_{22} & . & . & .a_2 & . & . & \varphi_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \varphi_{l1}, & \varphi_{l2} & . & . & .a_i & . & . & \varphi_{ln} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \varphi_{n1}, & \varphi_{n2} & . & . & .a_n & . & . & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \quad (13)$$

Распределение потенциала может быть определено при помощи метода потенциальной сетки и другими путями.

Один из способов состоит в том, что, опираясь на известные значения потенциалов на контурах электродов, задаются каким-либо распределением потенциалов во всех узловых точках сетки изучаемой области.

Подставляя значения потенциалов в левую часть уравнения (2), вычисляют остатки для расчета потенциала в каждой точке. Очевидно, если бы задача, касающаяся распределения потенциалов, была решена точно, то остатки при расчете левой части уравнения были бы для всех точек равны нулю. Поэтому, если остатки не равны нулю, то потенциалы узловых точек перераспределяют так, чтобы свести остатки к нулю или к столь малой величине, которой можно пренебречь.

Определив потенциалы в узловых точках, легко определить напряженность поля E и соответственно плотность тока в любой точке электрода. Так как силовые линии перпендикулярны контуру электрода, то

$$|E| = \frac{\varphi_P - \varphi_Q}{a} m, \quad (14)$$

где φ_P и φ_Q — потенциалы в точках P и Q (см. рис. 10);

a — расстояние между узловыми точками P и Q ;

m — масштаб, принятый при расчете потенциалов.

Расчет по методу сеток для полей некоторых конфигураций, имеющих цилиндрическую симметрию, удобнее выполнять в полярных координатах [22]. В этом случае сетка образуется дугами концентрических окружностей и n радиусами, выходящими из общего центра этих окружностей так, чтобы любые соседние радиусы образовывали угол $\frac{\alpha}{n}$, где α — угол между крайними радиусами сетки. Полюс сетки выбирается так, чтобы он совпал с проекцией оси симметрии исследуемой конфигурации.

Уравнение, связывающее группу узловых точек O, P, Q, R и S (рис. 11), имеет вид:

$$\frac{1}{Q_P + Q_R} \left(\frac{\varphi_P - \varphi_O}{a_P} + \frac{\varphi_R - \varphi_O}{a_R} \right) + \frac{1}{a_Q + a_S} \left[\frac{\varphi_Q - \varphi_O}{a_Q} \left(1 + \frac{a_S}{2r} \right) + \frac{\varphi_S - \varphi_O}{a_S} \left(1 - \frac{a_Q}{2r} \right) \right] = 0. \quad (15)$$

Если радиусы дуг сетки выбрать такими, чтобы они возрастали в геометрической прогрессии $r_n = r_1 q^{n-1}$, где знаменатель прогрессии $q \approx 1 + \frac{\alpha}{n} \left(1 + \frac{\alpha}{2n} \right)$, то уравнение (15) упрощается и принимает вид:

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S - 4\varphi_O = 0. \quad (16)$$

Метод потенциальной сетки может быть применен и для решения пространственных (трехмерных) задач (рис. 12). В этом случае уравнение в конечных разностях, связывающее узловые точки O, P, Q, R, S, T и U , может быть записано в таком виде:

$$\varphi_P + \varphi_Q + \varphi_R + \varphi_S + \varphi_T + \varphi_U - 6\varphi_O = 0. \quad (17)$$

При расчете поля электролизера по методу потенциальной сетки, вначале полагаем, что поверхности анода и катода эквипотенциальны. Найдя значения плотностей тока на отдельных участках электродов и используя поляризационные кривые, определяем значения потенциала на соответствующих участках, после чего при скорректированных граничных условиях вновь решаем задачу поля. Для технических целей такое приближение оказывается вполне достаточным.

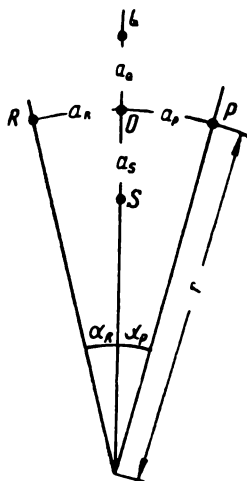


Рис. 11. К расчету двухмерного поля по методу потенциальной сетки в полярных координатах

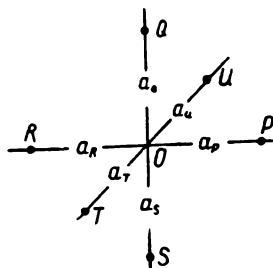


Рис. 12. К расчету трехмерного поля по методу потенциальной сетки

Весьма трудоемкая работа по вычислению потенциалов в узловых точках сетки может быть в короткий срок выполнена с помощью счетных машин.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОЛЯ

Аналитическое решение задач поля электролизеров сводится к определению потенциалов и напряженности как функции координат внутри исследуемой области. При этом должны быть получены соотношения, связывающие между собой геометрическую конфигурацию электролизера и электродов с распределением потенциала. Все возможные решения указанных задач могут быть получены путем решения уравнения Лапласа.

Уравнению Лапласа, имеющему большое значение для мно-

гих областей техники — гидродинамики, электростатики, тепло-техники — было посвящено большое количество исследований, в результате которых разработано много специальных методов его решения. Мы ограничимся описанием лишь нашедших наиболее широкое применение в практике методов, к числу которых относится метод зеркальных изображений и метод конформных отображений, нашедший широкое применение для решения задач двумерного поля.

При решении задач поля с помощью указанных методов предполагается эквипотенциальность электродов. Если же должны быть учтены поляризуемость и падение потенциала в теле электродов, то решение задачи значительно усложняется.

В тех случаях, когда в поле рассматриваемой конфигурации существует геометрическая симметрия, очень важно воспользоваться этим условием для упрощения искомого решения. Например, если имеется равномерно заряженный бесконечно длинный проводник круглого сечения, то вследствие симметрии электрическое поле будет чисто радиальным, не будет изменяться в направлении, параллельном оси, и не будет зависеть от угла. В результате соответственно упростится уравнение Лапласа, так как $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ будут равны нулю.

В отдельных простейших случаях задача поля может быть решена на основе расчетов формы линий тока и эквипотенциальных поверхностей, например в случае двух линейных параллельных электродов.

Метод зеркальных изображений

Метод зеркальных изображений используется для расчета поля заряженных проводников, расположенных вблизи плоских поверхностей, ограничивающих проводящую или изолирующую среду.

Рассмотрим поле кругового цилиндра с радиусом r_0 , который расположен на расстоянии a от плоского электрода с потенциалом $\varphi = \text{const}$. Линии тока перпендикулярны поверхности плоского электрода $\frac{\partial \varphi}{\partial n_{y=0}} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_{y=0}}$.

Для решения задачи можно мысленно устранить плоский электрод и заменить его цилиндрическим, являющимся зеркальным изображением рассматриваемого нами реального цилиндрического электрода, но с зарядом противоположного знака. Плоскость, расположенная на равном удалении от обоих проводников, являясь в проекции линией симметрии, представляет собой, как известно, линию равного потенциала. Следовательно, выполняются условия $\varphi = \text{const}$ и перпендикулярность линий тока $\frac{\partial \varphi}{\partial n_{y=0}} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_{y=0}}$. Таким образом, решение сводится к общеиз-

вестному расчету поля между двумя круговыми цилиндрами с различным зарядом.

Если вместо проводящей поверхности поместить изолятор, то граничные условия изменятся и будут записаны в виде $\frac{\partial \varphi}{\partial y_{y=0}} = 0$.

В этом случае также может быть использован метод зеркальных изображений. Однако для того чтобы было выполнено условие $\frac{\partial \varphi}{\partial y_{y=0}} = 0$, заряд изображения должен быть того же знака, что и заряд реального цилиндра. Таким образом, решение сводится к расчету поля между двумя одинаково заряженными цилиндрами.

Метод зеркальных изображений применим также для любого числа линейных проводников, расположенных параллельно плоской проводящей или непроводящей поверхности. Расчет сводится к расчету поля между реальными проводниками и их изображениями, причем знак заряда принимается противоположным в случае плоского проводника и одноименным в случае плоского изолятора.

Если линейный проводник расположен между двумя проводящими плоскостями, то также можно применить метод изображений. Для выполнения основного условия, т. е. чтобы поверхности плоских электродов были поверхностями равных потенциалов, они должны служить осями симметрии. Для этого необходимо от обеих поверхностей отразить не только линейный электрод, но и все его отражения. В результате получается система из бесконечного ряда линейных электродов с зарядами чередующихся знаков, для которой и решается задача поля.

В более сложном случае, когда линейный проводник расположен между двумя плоскими электродами и электролит ограничен непроводящими стенками прямоугольного электролизера, необходимо многократно отразить от непроводящих стенок ток линейного проводника. В результате получится бесконечная решетка линейных проводников с токами одинаковых знаков. Каждое такое отражение надо многократно отразить от плоских электродов, в результате чего получится бесконечное количество решеток с чередующимися знаками зарядов.

Метод изображений может быть распространен и на криволинейные поверхности. Так, в частности, с помощью изображения в сферических поверхностях решается задача поля двух проводящих шаров.

Метод конформных отображений

Решение задачи, касающейся распределения поля в электролизере, в случае, когда потенциал зависит только от двух координат, сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

при заданном распределении потенциала на границах.

Если частью границы является металлический проводник (электрод), то вдоль такой части величина потенциала постоянна (если пренебречь электродной поляризацией и считать проводимость металлического электрода бесконечно большой).

Для решения двумерных задач применяют методы теории функции комплексного переменного (рис. 13), используя тот факт, что любая аналитическая функция¹ комплексного переменного является решением уравнения Лапласа. Отсюда следует, что вещественная и мнимая части этой функции порознь также удовлетворяют уравнению Лапласа в силу его линейности.

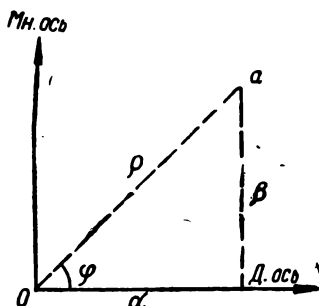


Рис. 13. $\alpha = \operatorname{Re}(a)$; $\beta = \operatorname{Im}(a)$;
 $\rho = |a|$; $\varphi = \arg a$; $a = \rho e^{j\varphi}$

Будем рассматривать потенциал поля φ как мнимую часть аналитической функции:

$$w(z) = \psi(x, y) + j\varphi(x, y). \quad (2)$$

Функции ψ и φ в силу аналитичности функции $w(z)$ связаны между собой равенствами:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4)$$

носящими название условий Коши — Римана.

Из этих условий следует, что функции ψ и φ удовлетворяют уравнению Лапласа. В самом деле, если продифференцировать равенство (3) по x , а равенство (4) по y и сложить полученные величины, то получается уравнение (1) для функции ψ . Если продифференцировать равенство (3) по y , а равенство (4) по x

¹ Функция w представляет собой регулярную аналитическую функцию комплексной переменной z в некоторой области, если она однозначна, непрерывна и имеет производную во всех точках этой области.

и вычесть эти величины, то получим уравнение (1) для функции φ .

Умножив равенство (3) на $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, а (4) — на $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ и складывая их, получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) выражает условие ортогональности кривых $\varphi = \text{const.}$ и $\psi = \text{const.}$

Поскольку кривые $\varphi = \text{const.}$ являются эквипотенциальными линиями, то ортогональные им кривые $\psi = \text{const.}$ будут силовыми линиями, или линиями тока. Соответственно функция ψ называется функцией тока. Функция w называется комплексным потенциалом поля.

Зная одну из функций ψ или φ , можно с точностью до аддитивной постоянной найти другую функцию, используя условия Коши — Римана.

Аналитическая функция $w = f(z)$ комплексного переменного осуществляет конформное отображение некоторой области в плоскости z в соответствующую область плоскости w . При таком отображении фигуры конечных размеров искажаются, но углы между двумя любыми кривыми и ориентация этих кривых сохраняются неизменными.

При конформном отображении сохраняет свой вид уравнение Лапласа. Это позволяет решение задач для сложных областей сводить к решению задач более простых областей. При этом основная трудность заключается в нахождении функции, отображающей данную область в другую область наиболее простой конфигурации, например в бесконечную полосу.

После того как это отображение найдено, последующее решение не вызывает трудностей, так как, например, границы полосы обращаются в эквипотенциальные линии, а поле между ними однородно. Находя потенциал такого поля и возвращаясь к переменным x и y , находят искомое распределение потенциала $\varphi(x, y)$ и функции тока $\psi(x, y)$, что позволяет вычислить напряженность поля \vec{E} .

Величина напряженности определяется формулой:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}. \quad (6)$$

С другой стороны,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) получим:

$$E = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}. \quad (8)$$

Определив преобразующую функцию и найдя ее производную, так называемый коэффициент преобразования, можно определить напряженность поля и отсюда плотность тока $i = \frac{E}{\rho}$.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению аналитической функции $w = f(z)$ по заданной конфигурации контура сечения проводников (электродов) и изолирующих стенок ванны.

В ряде случаев следуют обратным путем: исследуя различные аналитические функции, находят соответствующие им поля.

В качестве примера рассмотрим поле, определяемое аналитической функцией [39]:

$$z = x + jy = C \sin \frac{w}{\rho} = C \sin \frac{u + jv}{\rho}, \quad (9)$$

где ρ — постоянная вещественная величина.

Преобразуя (9), получим

$$x + jy = C \sin \frac{u}{\rho} \operatorname{ch} \frac{v}{\rho} + j C \cos \frac{u}{\rho} \operatorname{sh} \frac{v}{\rho}. \quad (10)$$

После разделения действительных и мнимых частей получим

$$x = C \sin \frac{u}{\rho} \operatorname{ch} \frac{v}{\rho}; \quad \operatorname{ch} \frac{v}{\rho} = \frac{x}{C \sin \frac{u}{\rho}}; \quad (11)$$

$$y = C \cos \frac{u}{\rho} \operatorname{sh} \frac{v}{\rho}; \quad \operatorname{sh} \frac{v}{\rho} = \frac{y}{C \cos \frac{u}{\rho}}. \quad (12)$$

Возвышая в квадрат (11) и (12) и вычитая, получим уравнение:

$$\frac{x^2}{C^2 \sin^2 \frac{u}{\rho}} - \frac{y^2}{C^2 \cos^2 \frac{u}{\rho}} = 1, \quad (13)$$

представляющее уравнение гиперболы с действительной осью, равной $C \sin \frac{u}{\rho}$, и фокусным расстоянием $2C$. Область, заключенная между ветвями гиперболы в плоскости z , $u = u_0$ отображается в плоскости w на полосу шириной $2u_0$, расположенную симметрично по обе стороны оси ординат v . Семейство прямых $u = \text{const}$ отображается на плоскости z в виде семейства софокусных гипербол. Горизонтальные прямые $v = \text{const}$ отображаются в плоскости z в виде софокусных эллипсов. В самом деле, из (11) и (12) следует, что

$$\sin \frac{u}{p} = \frac{x}{C \operatorname{ch} \frac{v}{p}}; \quad (14)$$

$$\cos \frac{u}{p} = \frac{y}{C \operatorname{sh} \frac{v}{p}}. \quad (15)$$

Возвышая в квадрат (14) и (15) и складывая, получим уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{C^2 \operatorname{ch}^2 \frac{v}{p}} + \frac{y^2}{C^2 \operatorname{sh}^2 \frac{v}{p}} = 1 \quad (16)$$

с фокусным расстоянием $2C$.

Напряженность поля E_z равна $\left| \frac{dw}{dz} \right|$. Из (9) находим

$$\omega = p \arcsin \frac{z}{C} = p \arcsin \frac{x + jy}{C}. \quad (17)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} E &= \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{Cp}{\sqrt{C^2 - x^2 + y^2 - j2xy}} \right| = \\ &= \frac{Cp}{\sqrt[4]{(C^2 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для определения аналитической функции $\omega = f(z)$ по заданной конфигурации поля, если границы поля представляют собою многоугольник, используют формулу Кристоффеля — Шварца. Полученная функция дает отображение верхней полуплоскости на исследуемый n -угольник.

Если границы электролизера представляют собой в плоскости z n -угольник с вершинами $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$, внутренние углы которого равны $\beta_1 \pi, \beta_2 \pi \dots \beta_n \pi$, то функция

$$z = C_1 \int_0^w (w_1 - a_1)^{\beta_1 - 1} (w_1 - a_2)^{\beta_2 - 1} \dots (w_1 - a_n)^{\beta_n - 1} dw_1 + C_2 \quad (19)$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость плоскости w_1 на исследуемый n -угольник. При этом числа $a_1, a_2 \dots a_n$ представляют собой координаты точек вещественной оси, соответствующих вершинам $A_1, A_2 \dots A_n$ n -угольника (рис. 14).

Решение задачи сводится к определению постоянных $a_1, a_2 \dots a_n, C_1$ и C_2 .

Для определения постоянных можно составить $(n-3)$ уравнения. Три значения a могут быть взяты произвольно.

Примеры использования преобразования Кристоффеля — Шварца представлены на стр. 60, 63, 104, 110.

В случае если в исследуемой области существуют закругления, то острые углы в преобразовании Кристоффеля—Шварца должны быть заменены на закругленные. Для этого применяется несколько методов [38].

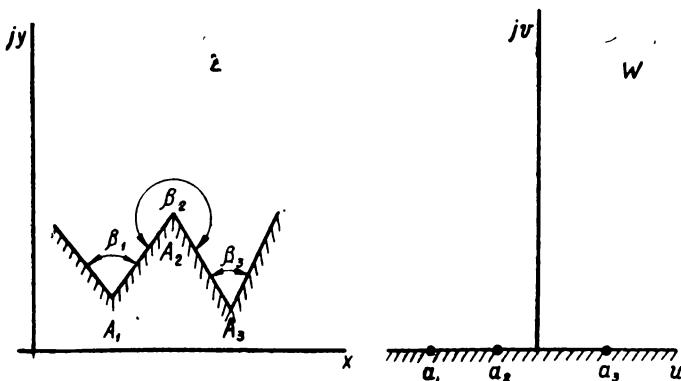


Рис. 14

Один из них, например, заключается в замене множителя $w^{\beta-1}$ на $(w+1)^{\beta-1} + \lambda(w-1)^{\beta-1}$.

Между точками $w = +1$ и $w = -1$ получается теперь кривая, форма которой зависит от λ . Пример применения такого преобразования приведен на стр. 93.

Решение трехмерных задач

Для решения трехмерных задач часто используют метод разделения переменных, сущность которого заключается в том, что ищется частное решение уравнения Лапласа в виде произведения функций, каждая из которых содержит только одно из переменных в рассматриваемой системе координат. В результате получаются обыкновенные дифференциальные уравнения по каждой из переменных.

В качестве примера рассмотрим уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

Будем искать решение уравнения (20) в виде

$$\varphi = R(r) \theta(\vartheta) Z(z). \quad (21)$$

Подставляя решение (21) в (20), получим:

$$\theta Z \frac{d^2 R}{dr^2} + \theta Z \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2} R Z \frac{d^2 \theta}{d\vartheta^2} + R \theta \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (22)$$

Разделим (22) на $R\theta Z$ и перенесем последний член в правую часть, тогда

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \cdot \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\theta r^2} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\vartheta^2} = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (23)$$

Левая часть уравнения (23) не содержит z и, следовательно, от него не зависит. Правая часть не зависит от r и ϑ . Отсюда следует, что левая и правая части уравнения (23) должны быть равны одной и той же постоянной величине.

Отсюда получают два уравнения:

$$-\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_1^2; \quad (24)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \cdot \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\theta r^2} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\vartheta^2} = -k_1^2. \quad (25)$$

Умножая обе части уравнения (25) на r^2 и преобразуя, получим:

$$\frac{r^2}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \cdot \frac{dR}{dr} + k_1^2 r^2 = -\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\vartheta^2}. \quad (26)$$

Из вышеуказанных соображений следует:

$$-\frac{1}{\theta} \cdot \frac{d^2 \theta}{d\vartheta^2} = k_2^2; \quad (27)$$

$$\frac{r^2}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \cdot \frac{dR}{dr} + k_1^2 r^2 = k_2^2. \quad (28)$$

Таким образом, нахождение частного решения уравнения Лапласа сводится к решению уравнений (24), (27), (28).

Из уравнения (27) получаем общее решение:

$$\theta = A \sin k_2 \vartheta + B \cos k_2 \vartheta. \quad (29)$$

Увеличение ϑ на 2π при неизменных r и z соответствуют возвращению в исходную точку пространства. Поэтому функция θ должна меняться периодически с периодом 2π . Отсюда следует, что k_2 может принимать только целочисленные значения: $k_2 = m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Следовательно,

$$\theta = A \sin m \vartheta + B \cos m \vartheta. \quad (30)$$

Преобразуя (28), получим:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + R \left(k_1^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) = 0. \quad (31)$$

Общим решением уравнения (31) является функция

$$R = C j_m(k_1 r) + D_y Y_m(k_1 r), \quad (32)$$

где $j_m(k_1 r)$ — функция Бесселя, а $Y_m(k_1 r)$ — функция Неймана.

Что касается уравнения (24), то его общим решением является функция

$$Z = M \operatorname{ch} k_1 z + N \operatorname{sh} k_1 z. \quad (33)$$

Таким образом, искомое частное решение (21) уравнения Лапласа имеет вид:

$$\varphi = [C j_m(k_1 r) + D Y_m(k_1 r)] [A \sin m \vartheta + B \cos m \vartheta] \times \\ \times [M \operatorname{ch} k_1 z + N \operatorname{sh} k_1 z]. \quad (34)$$

Если поле обладает цилиндрической симметрией, то потенциал не зависит от координаты ϑ . Поэтому в выражении (34) следует положить $m = 0$. Тогда

$$\varphi = [C j_0(k_1 r) + D Y_0(k_1 r)] [M \operatorname{ch} k_1 z + N \operatorname{sh} k_1 z]. \quad (35)$$

Для нахождения поля, удовлетворяющего заданным граничным условиям на поверхности электролизера, ищут решение в виде ряда по функциям (35). Коэффициенты этого ряда находят из уравнений, которые получают из граничных условий.

Расчет поля с учетом поляризуемости электродов

При погружении металла в электролит на границе их соприкосновения возникает скачок потенциала, который принято называть электродным потенциалом. При протекании тока через электролизер в слое электролита, прилегающем к электроду, происходит дополнительное падение потенциала, получившее название поляризации. Толщину слоя электролита, в котором происходит указанное падение потенциала, можно практически считать бесконечно малой и соответственно рассматривать поляризацию как скачок потенциала на границе электрод — электролит.

Величина поляризации зависит от плотности тока $\varphi = \varphi(i)$; в результате потенциал на границе оказывается неодинаковым. Изменение потенциала с плотностью тока, так называемая поляризуемость, значительно осложняет аналитическое решение задачи поля.

В литературе опубликовано лишь небольшое количество работ, в которых дано аналитическое решение задач поля с уче-

том поляризуемости для электродов наиболее простых форм. К числу указанных работ относятся работы Фрумкина [25, 26], Левица [26], Вебера [32—36], Тобиас и Вайсмана [29], Каспера [23, 24], Вагнера [27, 28] и Исизака [30, 31]. Из них только работы последних пяти авторов представляют интерес в связи с расчетом электролизеров. Остальные работы связаны с расчетом коррозионных процессов.

В работе Вагнера [27] рассмотрен вопрос о распределении тока на катоде, представляющем собой тонкую пластинку конечной величины, помещенную непосредственно у плоской бесконечной стенки электролизера на очень большом расстоянии от анода. При решении задачи вначале определяется потенциал, который создается точечным зарядом, находящимся на поверхности катода. Затем, используя принцип суперпозиции, Вагнер приходит к интегральному уравнению, решение которого позволяет определить распределение потенциала и затем распределение тока на катоде. Подробно описанное решение приведено на стр. 56—57.

Тобиас и Вайсман рассмотрели распределение тока на плоских полубесконечных, параллельно расположенных поляризующихся электродах, в теле которых падение напряжения составляет заметную величину. При решении задачи (см. 73) они использовали уравнение Лапласа для вещественной части комплексного потенциала (функции тока). Пользуясь линейностью уравнения Лапласа, они представили полное решение как сумму двух решений, первое из которых дает функцию тока в отсутствии поляризации, а второе учитывает поляризацию. Для второго решения используется метод разделения переменных. В результате получается решение в виде ряда.

Каспер для решения задачи поля в системе линейный катод — плоский поляризующийся анод также использовал линейность уравнения Лапласа и выразил потенциал как сумму решения в отсутствии поляризации и добавки, учитывающей поляризацию. Эта добавка представлена в виде интеграла Фурье. Из граничных условий получают уравнения для функции, входящей под знак интеграла. В результате получают значения потенциала и плотности тока.

Исизака, применив аналогичный способ суммирования решения в отсутствии поляризации и добавки, учитывающей поляризацию, и использовав метод разделения переменных для уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, получил решение для вычисления потенциала в системе электродов — коаксиальных цилиндров. Один из электродов (полый цилиндр) — неполяризующийся, а другой — поляризующийся; в теле последнего достаточно велико омическое падение напряжения. Полученное решение представлено в виде ряда (стр. 123).

В случае электродов более сложных конфигураций необходимость учета поляризации вызывала столь большие математиче-

ские трудности, что аналитическое решение получить не удалось. В то же время возможность непосредственного использования формул для расчета полей представляет несомненное удобство и облегчает сопоставление технологических параметров и выбор их оптимальных значений.

В связи с этим нами [40] был разработан способ приближенного расчета полей в электролизерах с учетом поляризации, который может быть использован для полей любых конфигураций, в том числе и трехмерных.

Предварительно для заданного поля должна быть решена

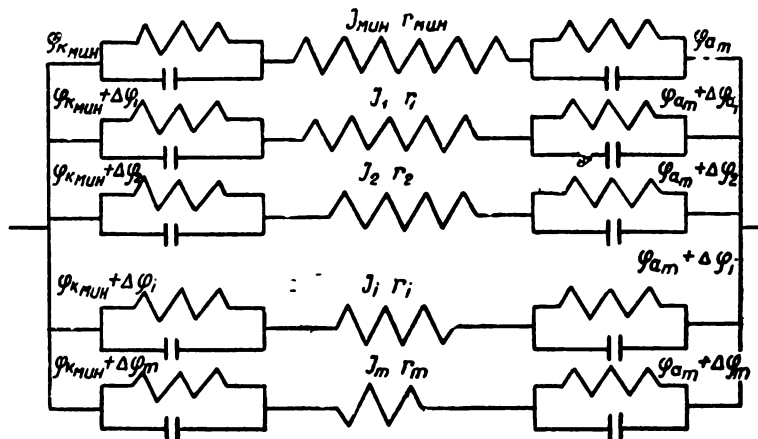


Рис. 15. Эквивалентная схема

задача о распределении тока на эквипотенциальной поверхности катода (т. е. без учета поляризации). Далее для расчета действительных плотностей тока с учетом поляризации составляем эквивалентную схему, в которой силовые трубки представлены в виде системы параллельно соединенных проводников (рис. 15). В расчете допускаем, что направление силовых линий определяется только геометрической характеристикой электролизера и не зависит от изменения величины потенциала на различных участках катода. Это допущение вносит в расчет известное искажение. Однако можно показать, что действительное распределение тока будет всегда более равномерным, чем рассчитанное по нашему методу.

Если можно пренебречь влиянием поляризации одного из электродов, например поляризацией анода, то будет справедливо уравнение:

$$\varphi_a - \varphi_k + i_{мин} lds \frac{1}{d G_{мин}} = \varphi_a - \varphi_k + f(i_i) + i_i lds \frac{1}{d G_i}, \quad (36)$$

где φ_a — потенциал анода;
 φ_k — потенциал катода на участке с минимальной плотностью тока;

$f(i_i)$ — приращение потенциала катода на i -м участке относительно потенциала участка с минимальной плотностью тока;

i_{\min} — минимальная плотность тока;

i — действительная плотность тока на i -м участке трубки;

lds — поверхность рассматриваемых участков;

dG_{\min} — проводимость трубки тока, опирающейся на участок катода с минимальной плотностью;

dG_i — проводимость трубки тока, опирающейся на i -ый участок катода ($dG_i = \frac{1}{dr_i}$).

Очевидно уравнение (26) легко преобразуется в

$$i_{\min} lds \frac{1}{dG_{\min}} = f(i_i) + i_i hds \frac{1}{dG_i}. \quad (37)$$

Проводимость трубок dG_0 и dG_i может быть определена различным путем в зависимости от конфигурации поля.

Если для рассматриваемого поля известна его проводимость в целом (или емкость, от которой можно легко перейти к проводимости), то проводимость каждой трубки определяют из равенства:

$$IG_s = i_{\min} l \frac{ds}{dG_{\min}} = i_{ip} l \frac{ds}{dG_i}, \quad (38)$$

где G_s — проводимость системы в целом;

I — общий ток, проходящий через весь электролит;

i_{ip} — расчетная плотность тока (без учета поляризации) на i -ом участке.

Если рассматриваемая система содержит область равномерного поля, то проводимость каждой трубки может быть определена из равенства

$$i_0 lds \frac{1}{dG_0} = i_{\min} lds \frac{1}{dG_{\min}} = i_{ip} lds \frac{1}{dG_i}, \quad (39)$$

где i_0 — плотность тока в области равномерного поля;

G_0 — проводимость трубки электролита в области равномерного поля.

В отдельных случаях может быть найдена проводимость отдельных участков электролита с заданной плотностью тока, что позволяет, используя соотношения, подобные (38) и (39), определять проводимость любой трубки.

Определив величину проводимостей dG_{\min} и dG_i , подставляем их значения в уравнение (37). Для определения $f(i_i)$ используем зависимость между катодным потенциалом и плотностью тока, которая обычно задается графически.

После подстановок значений $dG_{\text{мин}}$, dG_i и $f(i_i)$ решаем уравнение (37) методом последовательных приближений или графически.

Если нельзя пренебречь поляризацией второго электрода, то весь расчет заметно усложняется. При этом расчетное уравнение для определения i_i примет вид:

$$\varphi_0 = i_{\text{мин}} l \frac{ds}{dG_{\text{мин}}} = f(i_i) + \psi(i_{a_i}) + i_i l \frac{ds}{dG_i}. \quad (40)$$

Чтобы определить i_{a_i} , необходимо вычислить плотность тока в точке анода, в которую входит силовая линия, выходящая из точки катода с плотностью тока i_i . Для этого находим уравнение силовой линии, проходящей через i -й участок катода, и определяем точку пересечения найденной силовой линии с анодом, после чего в найденной точке определяем плотность тока. Положив отношение $\frac{i_{a_i}}{i_i} = t$, перепишем уравнение (30) в виде:

$$\varphi_0 = f(i_i) + \psi(t i_i) + i_i l \frac{ds}{dG_i} = i_{\text{мин}} l \frac{ds}{dG_{\text{мин}}}. \quad (41)$$

Уравнение (31) решается относительно i_i графически или методом итерации. При этом используем известную взаимосвязь между плотностью тока и величинами катодного и анодного потенциалов.

В результате для каждого участка электрода определяем соответствующую плотность тока.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРОВ

При экспериментальном исследовании электрических полей в электролизерах в ряде случаев оказывается целесообразным прибегать к моделированию. Принципы построения моделей могут быть различными в зависимости от постановки задачи.

В ряде случаев поле электролизера может быть разбито на ряд симметричных элементов (с прямой или зеркальной симметрией). Исследование такого поля значительно упрощается, если исследовать распределение тока и потенциала на выделенном элементе симметрии. При этом должны быть сохранены абсолютные размеры выделенного элемента поля.

Исследование полей большой протяженности или резко неоднородных полей можно значительно упростить путем применения конформно преобразованных моделей [14]. Исследуемое поле конформно преобразуют так, чтобы получилось поле более простой конфигурации. При этом не требуется, чтобы для поля преобразованной системы существовало аналитическое решение. Преобразуют координатную сетку, в которой построена фигура, и новую фигуру строят в полученной координатной сетке по

соответствующим точкам. Результаты экспериментального исследования поля новой фигуры преобразуют обратно, соответственно конфигурации исходной фигуры. Напряженность и плотность тока могут быть легко вычислены через значения напряженности в соответствующих точках полей, если известна преобразующая функция. Поскольку в электролизерах потенциалы электродов изменяются с плотностью тока, возможность использования метода исследования с помощью конформно преобразованных моделей требует дополнительного изучения.

В большинстве случаев возникает необходимость исследования полей геометрически подобных моделей. Такая необходимость может возникнуть, когда в лаборатории создается модель крупногабаритных промышленных электролизеров, установок для катодной защиты и т. д. В этом случае модель должна быть, разумеется, меньших размеров. Наоборот, при моделировании коррозионных элементов необходимо создавать модели больших размеров.

Если бы не было электродной поляризации, то в геометрически подобных моделях возникали бы подобные электрические поля. Однако поляризация электродов требует специальных условий для того, чтобы было обеспечено подобие полей действительной установки и геометрически подобной модели.

Добавим, что в ряде случаев оказывается целесообразным исследование полей проводить на электролитах с иной поляризационной характеристикой. Это относится к исследованию полей электролизеров для получения алюминия, натрия, калия и других металлов, выделяемых путем электролиза расплавленных сред, так как при исследовании полей в расплавленных средах возникают почти непреодолимые затруднения. Поэтому целесообразно исследовать соответствующие поля, применяя водные растворы при комнатной температуре.

Рассмотрим условия моделирования электрохимических систем [41].

При пропорциональном изменении линейных размеров электролизера и электродов для сохранения электрохимического подобия необходимо подобрать условия, чтобы во всех сходственных точках электролизеров натуры и модели, включая границы, векторы напряженности совпали по направлению и чтобы сохранилась пропорциональность между величинами напряженности во всех сходственных точках действительных электролизеров и модели.

Очевидно, для этого достаточно, чтобы сохранилась пропорциональность между потенциалами во всех сходственных точках действительной установки и модели, так как распределение потенциала однозначно определяет поле.

Поскольку значение потенциалов в электрическом поле постоянных токов однозначно определено, если заданы граничные значения потенциалов (на обоих электродах), то для достиже-

ния подобия полей действительной установки и модели необходимо, чтобы было соблюдено условие пропорциональности потенциалов в сходственных точках границ:

$$\frac{\varphi_{ki}}{\varphi_{ki_m}} = \frac{\varphi_{ai}}{\varphi_{ai_m}} = \text{const.} \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда можно пренебречь падением потенциала в теле электродов, т. е. когда потенциал катода (со стороны металла) $\varphi_{mk} = \text{const}$ и потенциал анода $\varphi_{ma} = \text{const}$.

Если положить величину потенциала катода (со стороны электролита) в сходственных точках натурь и модели $\varphi_{k1} = 0$ и $\varphi_{k1_m} = 0$, то потенциалы соответствующих им (т. е. опирающихся на те же силовые трубки 1) точек анода будут равны:

$$\varphi_{a1} = \varphi_{k1} + \Delta\varphi_{a1} = \Delta\varphi_{a1}; \quad \varphi_{a1_m} = \varphi_{k1_m} + \Delta\varphi_{a1_m} = \Delta\varphi_{a1_m}, \quad (2)$$

где $\Delta\varphi_{a1}$ и $\Delta\varphi_{a1_m}$ — падение потенциала в трубках 1 действительной установки и модели.

Величина электродного потенциала относительно потенциала металла может быть определена из функциональной зависимости $\varphi_{ki} - \varphi_{mk} = \psi(i_{ki})$ (для катода) и $\varphi_{ai} - \varphi_{ma} = \theta(i_{ai})$ (для анода), где i_{ki} и i_{ai} — плотности тока на катоде и аноде.

Воспользовавшись указанной зависимостью, определим величину потенциалов в любой точке катода (со стороны электролита) натурь:

$$\begin{aligned} \varphi_{ki} - \varphi_{k1} &= \varphi_{ki} = \varphi_{mk} + \psi(i_{ki}) - \varphi_{mk} - \psi(i_{k1}); \\ \varphi_{ki} &= \psi(i_{ki}) - \psi(i_{k1}) \end{aligned} \quad (3)$$

и в сходственной точке модели

$$\varphi_{ki_m} = \psi_m(i_{ki_m}) - \psi_m(i_{k1_m}). \quad (4)$$

Соответственно учитывая (2), определим потенциалы в любой точке анода действительной установки:

$$\varphi_{ai} = \Delta\varphi_{a1} + \theta(i_{ai}) - \theta(i_{a1}) \quad (5)$$

и сходственной точке модели:

$$\varphi_{ai_m} = \Delta\varphi_{a1_m} + \theta_m(i_{ai_m}) - \theta_m(i_{a1_m}). \quad (6)$$

Подставив найденные величины потенциалов из (3), (4), (5) и (6) в (1), получим условия электрохимического подобия:

$$\frac{\psi(i_{ki}) - \psi(i_{k1})}{\psi_m(i_{ki_m}) - \psi_m(i_{k1_m})} = \frac{\Delta\varphi_{a1} + \theta(i_{ai}) - \theta(i_{a1})}{\Delta\varphi_{a1_m} + \theta_m(i_{ai_m}) - \theta_m(i_{a1_m})}. \quad (7)$$

Для выполнения условия (7) достаточно, чтобы

$$\frac{\psi(i_{kl})}{\psi_m(i_{klm})} = \frac{\Delta\varphi_{kl}}{\Delta\varphi_{klm}} = \frac{\theta(i_{kl})}{\theta_m(i_{klm})}. \quad (8)$$

Если линейные размеры модели в p раз меньше линейных размеров действительной установки, то размеры модели

$$x_m = \frac{1}{p} x; \quad y_m = \frac{1}{p} y; \quad z_m = \frac{1}{p} z, \quad (9)$$

а поверхности сходственных участков электродов соответственно равны:

для трехмерного поля

$$s_{km} = \frac{s_k}{p^3}; \quad s_{am} = \frac{s_a}{p^2}; \quad (10)$$

для двухмерного поля

$$s_{km} = \frac{s_k}{p}; \quad s_{am} = \frac{s_a}{p}. \quad (11)$$

Если обозначить ток для модели через I_m и переходной коэффициент через k , то

$$I_m = kI. \quad (12)$$

Плотность тока на i -м участке модели, на который опирается силовая трубка, через которую течет ток j :

$$i_{im} = \frac{j_m}{s_{im}} = \frac{kj}{s_i/p^3} = kp^3 i_i; \quad (13)$$

для двухмерного поля

$$i_{im} = \frac{j_m}{s_{im}} = \frac{kj}{s_i/p} = kpi_i. \quad (14)$$

Омическое сопротивление сходственных трубок действительной установки r_i и модели r_{im} определится из равенств:

$$r_i = \rho \int_0^{l_i} \frac{dl}{s_i(l)}; \quad r_{im} = \rho_m \int_0^{l_{i'p}} \frac{d\left(\frac{l}{p}\right)}{s_i\left(\frac{l}{p}\right)}, \quad (15)$$

где ρ и ρ_m — удельное сопротивление электролита натуре и модели;

l и l_p — длины трубок тока;

$s_i(l)$ и $s_i\left(\frac{l}{p}\right)$ — сечения трубок.

Функция $s\left(\frac{l}{p}\right)$ по геометрическому смыслу в случае трехмерного поля есть однородная функция второго порядка, а в случае плоского поля — однородная функция первого порядка.

Поэтому в первом случае $s\left(\frac{l}{p}\right) = s(l)/p^2$ и во втором случае $s\left(\frac{l}{p}\right) = \frac{s(l)}{p}$. Очевидно, $d\left(\frac{l}{p}\right) = \frac{1}{p} dl$.

Из (12) и (14) определим падение потенциала в трубках тока действительной установки и модели (для трехмерного поля):

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi_{\varepsilon i} &= j\rho \int_0^{l_i} \frac{dl}{s_i(l)}; \\ \Delta\varphi_{\varepsilon i_m} &= j\rho_m \int_0^{l_i/p} \frac{d\left(\frac{l}{p}\right)}{s_i\left(\frac{l}{p}\right)} = kj\rho \rho_m \int_0^{l_i} \frac{dl}{s_i(l)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Используя соотношения (8), (14) и (16), получаем уравнение электрохимического подобия в окончательном виде¹:

$$\frac{\psi(i_k)}{\rho_m(k\rho^2 i_k)} = \frac{\rho}{\rho_m \rho k} = \frac{\theta(i_a)}{\theta(k\rho^2 i_a)}. \quad (17)$$

Учитывая (7), отметим, что в (17) в функциях $\psi(i)$ и $\theta(i)$ могут быть исключены постоянные члены, не зависящие от плотности тока.

Если падение потенциала в теле электрода достаточно велико, то это необходимо учитывать при моделировании.

Потенциалы электродов в i -й точке связаны с потенциалом электрода (со стороны металла) в точках l равенствами:

$$\varphi_{kl} = \psi(i_{kl}) + \Delta\varphi_{т.к}; \quad \varphi_{al} = \theta(i_{al}) + \Delta\varphi_{т.а}, \quad (18)$$

где $\Delta\varphi_{т.к}$ и $\Delta\varphi_{т.а}$ — падение потенциала в теле катода и анода.

¹ Отметим, что первое равенство в (17) было ранее получено Форсбломом, Машовцом.

Падения потенциала в теле электродов действительной установки и модели соответственно равны:

$$\Delta\varphi_{\tau, \kappa} = \rho_{\kappa} \int_0^{l_{\tau, \kappa}} j \frac{dl_{\tau, \kappa}}{s'_i(l_{\tau, \kappa})}; \quad \Delta\varphi_{\tau, \kappa m} = \rho_{\kappa} \rho_{\kappa m} \int_0^{l_{\tau, \kappa}} j \frac{dl_{\tau, \kappa}}{s'_i(l_{\tau, \kappa})}; \quad (19)$$

$$\Delta\varphi_{\tau, a} = \rho_a \int_0^{l_{\tau, a}} j \frac{dl_{\tau, a}}{s''_i(l_{\tau, a})}; \quad \Delta\varphi_{\tau, am} = \rho_a \rho_{am} \int_0^{l_{\tau, a}} j \frac{dl_{\tau, a}}{s''_i(l_{\tau, a})}, \quad (20)$$

где ρ_{κ} и ρ_a — удельное сопротивление материала катода и анода. Учитывая уравнения (18) — (20), (7) и (17) можно записать:

$$\frac{\psi(i_{\kappa i}) + \Delta\varphi_{\tau, \kappa} - \psi(i_{\kappa 1})}{\psi_m(i_{\kappa i m}) + \Delta\varphi_{\tau, \kappa m} - \psi_m(i_{\kappa 1 m})} = \frac{\Delta\varphi_{\tau, 1} + \theta(i_{a i}) + \Delta\varphi_{\tau, a} - \theta(i_{a 1})}{\Delta\varphi_{\tau, 1 m} + \theta_m(i_{a i m}) + \Delta\varphi_{\tau, a m} - \theta_m(i_{a 1 m})}; \quad (21)$$

$$\frac{\psi(i_{\kappa i})}{\psi_m(k\rho^2 i_{\kappa i})} = \frac{\theta(i_{a i})}{\theta_m(k\rho^2 i_{a i})} = \frac{\rho_{\kappa}}{\rho_{\kappa m} \rho k} = \frac{\rho}{\rho_m \rho k} = \frac{\rho_a}{\rho_{a m} \rho k}. \quad (22)$$

Как видно из сопоставления (17) и (22), учет падения потенциала в теле электродов налагает дополнительные ограничения для реализации электрохимического подобия.

Для соблюдения условий электрохимического подобия равенства (17) и (22) должны быть справедливы при любых значениях анодных и катодных плотностей тока. Следовательно, они должны быть независимы от плотностей тока, что и является ключом при конкретном расчете переходных коэффициентов.

Для того чтобы отношения (17) и (22) были независимы от i , функции $\psi(i)$ и $\psi_m(\rho^2 k i)$, $\theta_m(i)$ и $\theta_m(\rho^2 k i)$ должны соответственно изображаться кривыми одного и того же семейства.

При любой функциональной зависимости электрохимическое подобие выполняется при обязательном условии $k\rho^2 = 1$ для трехмерного поля и $k\rho = 1$ для двухмерного поля. При степенной и линейной зависимостях в выборе переходных коэффициентов оказывается больше свободы. Еще больше свободы при моделировании оказывается в случае, когда потенциал одного из электродов не зависит от плотности тока.

При конкретном расчете переходных коэффициентов необходимо исходить из уравнений, связывающих потенциалы электродов с плотностью тока. Известно, что эта связь в подавляющем большинстве характеризуется тремя типами уравнения:

$$\varphi = a + bi^t, \quad \varphi = a + bi \quad \text{и} \quad \varphi = a + b \ln i.$$

В качестве примера рассмотрим условия моделирования и вычислим переходные коэффициенты для отдельных комбинаций поляризационных характеристик.

$$1) \varphi_k = \psi(i) = a_1 + bi^t; \quad \varphi_a = \theta(i) = a_2 + ci^q.$$

а) Для трехмерного поля

$$\frac{bi^t}{b_m (ikp^2)^t} = \frac{\rho}{\rho_m p k} = \frac{ci_a^q}{c_m (i_a k p^2)^q}; \quad (23)$$

$$\frac{b}{b_m} \cdot \frac{1}{k^t p^{2t}} = \frac{\rho}{\rho_m p k};$$

$$k = \left(\frac{b \rho_m}{b_m \rho} \right)^{\frac{1}{t-1}} p^{\frac{2t-1}{1-t}}. \quad (24)$$

По аналогии

$$k = \left(\frac{c \rho_m}{c_m \rho} \right)^{\frac{1}{q-1}} p^{\frac{2q-1}{1-q}}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует:

$$\rho = \frac{\rho_m}{\rho} \left(\frac{b}{b_m} \right)^{\frac{q-1}{q-t}} \left(\frac{c}{c_m} \right)^{\frac{1-t}{q-t}}. \quad (26)$$

б) Для двумерного поля

$$k = \left(\frac{b \rho_m}{b_m \rho} \right)^{\frac{1}{t-1}} p^{\frac{t}{1-t}}; \quad (27)$$

$$k = \left(\frac{c \rho_m}{c_m \rho} \right)^{\frac{1}{q-t}} p^{\frac{q}{1-q}}; \quad (28)$$

$$\rho = \frac{\rho_m}{\rho} \left(\frac{b}{b_m} \right)^{\frac{q-1}{q-t}} \left(\frac{c}{c_m} \right)^{\frac{1-t}{q-t}}. \quad (29)$$

$$2) \varphi_k = a_1 + bi^t; \quad \varphi_a = a_2 + c \ln i_a^t.$$

а) Для трехмерного поля

$$\frac{bi^t}{b_m (ikp^2)^t} = \frac{\rho}{\rho_m p k} = \frac{c_m \ln i_a}{c_m \ln (i_a k p^2)}. \quad (30)$$

По аналогии с (18)

$$k = \left(\frac{b}{b_m} \cdot \frac{\rho_m}{\rho} \right)^{\frac{1}{t-1}} p^{\frac{2t-1}{1-t}}. \quad (31)$$

Для того чтобы правая часть равенства (30) не зависела от плотности тока, должно соблюдаться условие:

$$kp^2 = 1; \quad k = \frac{1}{p^2}. \quad (32)$$

Решая совместно (30) и (32), получим:

$$\rho = \frac{c \rho_m}{c_m \rho}; \quad (33)$$

$$k = \left(\frac{c_m \rho}{c \rho_m} \right)^2. \quad (34)$$

Чтобы равенства (31), (33) и (34) были совместны, должно соблюдаться условие:

$$\left(\frac{c_m \rho}{c \rho_m} \right)^2 = \left(\frac{b \rho_m}{b_m \rho} \right)^{\frac{1}{t-1}} \left(\frac{c \rho_m}{c_m \rho} \right)^{\frac{2t-1}{1-t}}, \quad (35)$$

откуда после преобразования получим:

$$\frac{b_m}{b} = \frac{c_m}{c}. \quad (36)$$

б) Для двумерного поля

$$\left. \begin{aligned} k &= \left(\frac{b}{b_m} \cdot \frac{\rho_m}{\rho} \right)^{\frac{1}{t-1}} p^{\frac{t}{1-t}}; \quad \rho = \frac{c \rho_m}{c_m \rho}; \\ \frac{b_m}{b} &= \frac{c_m}{c}; \quad k = \frac{1}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Полные результаты расчета переходных коэффициентов как для трехмерного, так и для двумерного поля сведены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, при необходимости учета поляризации обоих электродов и падения потенциала в теле электродов возникает большое количество ограничений, затрудняющих выполнение условий для точного моделирования. Задача значительно упрощается, если поляризацией одного из электродов можно пренебречь.

При моделировании гальванических ванн это возможно либо при малой величине анодной поляризации, либо при достаточной удаленности анодов. В этом случае при степенной зависимости потенциала катода от плотности тока моделирование может быть осуществлено в том же самом электролите. Следует оговорить, однако, что это возможно не при всех значениях показателя степени t и переходного коэффициента k .

Моделирование сравнительно легко осуществить при линейной зависимости потенциала от плотности тока. В этом случае

Таблица переходных коэффициентов при моделировании

№ вариантов	Ограничения в выборе переходных коэффициентов, налагаемые изменением потенциала катода		Поляризационная характеристика анода	Дополнительные ограничения, налагаемые изменением потенциала анода	Дополнительные ограничения, налагаемые падением потенциала в теле	
	ρ	k			катода	анода
1	—	<p>а) Для трехмерного поля</p> $k = \left(\frac{b \rho_m}{b_m \rho} \right)^{\frac{t-1}{t-1} \frac{2t-1}{t-1} \frac{1-t}{1-t}}; \rho = \frac{b}{b_m} \left(\frac{b}{b_m} \right)^{\frac{q-1}{q-t} \left(\frac{c}{c_m} \right)}$ <p>б) для двухмерного поля</p> $k = \left(\frac{b \rho_m}{b_m \rho} \right)^{\frac{t-1}{t-1} \frac{t}{1-t} \frac{1-t}{1-t}}; \rho = \frac{c \rho_m}{c_m \rho}; \frac{b_m}{b} = \frac{c}{c_m}$	$\varphi_a = a_2 + ci^q$ $\varphi_{am} = a_{2m} + c_m i^q$ $\varphi_a = a_2 + c \ln i$ $\varphi_{am} = a_{2m} + c_m \ln i$ $\varphi_a = a_2 + ci$ $\varphi_{am} = a_{2m} + c_m i$	$\rho = \frac{b}{b_m} \left(\frac{b}{b_m} \right)^{\frac{q-1}{q-t} \left(\frac{c}{c_m} \right)}$ $\rho = \frac{c \rho_m}{c_m \rho}; \frac{b_m}{b} = \frac{c}{c_m}$	$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\rho_k}{\rho_{km}}$	$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\rho_a}{\rho_{am}}$
2	$\rho = \frac{b \rho_m}{b_m \rho}$	<p>а) Для трехмерного поля</p> $k = \left(\frac{b_m \rho}{b \rho_m} \right)^2; \rho = \frac{b \rho_m}{b_m \rho}$ <p>б) для двухмерного поля</p> $k = \frac{b_m \rho}{b \rho_m}$	$\varphi_a = a_2 + c \ln i$ $\varphi_{am} = a_{2m} + c_m \ln i$ $\varphi_a = a_2 + ci$ $\varphi_{am} = a_{2m} + c_m i$	$\frac{c}{c_m} = \frac{b}{b_m}$ $\frac{c}{c_m} = \frac{b}{b_m}$	$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\rho_k}{\rho_{km}}$	$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\rho_a}{\rho_{am}}$
3	$\rho = \frac{b \rho_m}{b_m \rho}$	—	$\varphi_a = a_2 + ci$ $\varphi_{am} = a_{2m} + c_m i$	$\frac{c}{c_m} = \frac{b}{b_m}$	$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\rho_k}{\rho_{km}}$	$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\rho_a}{\rho_{am}}$

электрохимическое подобие сохраняется при любом токе, выбранном для модели. Возможное изменение размеров модели связано с соотношением электропроводностей и поляризационными характеристиками электролита действительной установки и модели. Чем большее выбрано линейное уменьшение размеров, тем меньше должна быть поляризуемость катода $\frac{d\varphi}{di}$ и больше удельное сопротивление электролита модели.

Практически вначале необходимо подобрать электролит для модели по ориентировочно заданной величине ρ и затем уже по поляризационной характеристике и величине удельного сопротивления выбранного электролита вычислить точно значение ρ .

Как видно из табл. 1, электрохимическое подобие при линейной, а также при логарифмической зависимости потенциала от плотности тока не может быть реализовано при применении одного и того же электролита для природы и модели.

При отсутствии необходимости учета падения потенциала в теле электрода электроды модели следует изготавливать из того же материала, из которого изготовлены электроды действительной установки. В противном случае для изготовления электрода модели выбирают материал, обеспечивающий выполнение условия $\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{\rho_k}{\rho_{k_m}}$. При выборе другого материала для электродов

их поляризационная характеристика изменяется. Поэтому электроды модели следует изготавливать из двух металлов так, чтобы наружная часть электрода была изготовлена из металла действительной установки или покрыта им, а приведенная величина удельного сопротивления равнялась требуемой величине.

Если сечение электродов в исследуемом электролизере постоянно и их толщина намного меньше междуэлектродного расстояния, то материалом для изготовления модели может служить материал природы. Однако в этом случае толщина электродов модели δ_m должна удовлетворять условию:

$$\delta_m = \frac{\delta}{\rho} \cdot \frac{\rho}{\rho_m}, \quad (38)$$

где δ — толщина электродов действительной установки.

Если для модели можно принять такой же электролит, как и для действительной установки, то без изменения следует оставить и материал электрода.

В заключение отметим, что если при экспериментальном исследовании определено общее напряжение на электролизере модели E_m , то легко может быть вычислено напряжение на действительном электролизере E_n

$$E_n = a + b + [E_m - a_m - b_m] \frac{\rho}{\rho_m \rho_k}, \quad (39)$$

где a , b , a_m и b_m — постоянные величины в формулах, связывающих потенциал с плотностью тока.

Поле плоских параллельных электродов представляет значительный интерес для технической электрохимии. Так, практически во всех гидроэлектрометаллургических установках — в электролизерах для рафинирования меди, в электролизерах для электроэкстракции цинка, меди, никеля — аноды и катоды имеют форму пластин сравнительно небольшой толщины. Так как в нижней части электролизера накапливается шлам, то катоды не погружают до самого низа во избежание цементации шлама растущим осадком, которая приводит к загрязнению осаждающегося на катоде металла и к образованию микронеровностей, которые разрастаются с большой скоростью в дендритообразные наросты.

Поскольку электроды не перекрывают всего сечения электролита, то поле оказывается неравномерным, в результате чего фактическая плотность тока в различных зонах электродов оказывается различной. Плотность тока оказывается повышенной на краях электродов, что имеет особое значение для катодного процесса, так как при повышенных плотностях тока электролитические осадки получают грубыми, с более развитым микрорельефом. Это приводит к перераспределению тока и к еще большей концентрации его на краях электрода, в результате чего образуются дендриты, которые могут накоротко замкнуть электролитическую ячейку. Поэтому для уменьшения концентрации силовых линий на крайних участках катода анод делают несколько более коротким, чем катод. Равномерность распределения тока имеет значение и для нормального протекания анодного процесса. Так, например, при повышении плотности тока на медном аноде могут быть достигнуты значения потенциалов, при которых в раствор, наряду с медью, будут переходить золото и серебро, что приведет к снижению процента попутно извлекаемых благородных металлов.

Поле плоских параллельных электродов аппроксимирует поле горизонтального разреза ванны для электролитического лужения непрерывно движущейся стальной ленты (катода), которое в настоящее время получило широкое применение в производстве белой жести. Анодные пластины и покрываемая лента на существующих установках не перекрывают по ширине ванны всего сечения электролита, вследствие чего создается неравномерность распределения тока и на аноде и на катоде. В то же

время при лужении в щелочных электролитах важно поддерживать анодную плотность тока в определенных пределах, чтобы обеспечить переход олова в раствор только в форме четырехвалентных ионов.

При чрезмерно низких плотностях тока олово будет переходить в раствор в виде Sn^{2+} , что приведет к образованию губчатых отложений на катоде. При чрезмерно больших плотностях тока анод покрывается коричневой пленкой, выход по току резко падает, что влечет за собой обеднение электролита оловом. Неравномерное распределение тока на катоде приведет к перерасходу олова. К тому же чрезмерная толщина осадка олова на краях ленты будет препятствовать получению белой жести высокого качества, так как при толщине слоя олова больше 1—1,2 μ не достигается удовлетворительное оплавление.

Поле плоских электродов моделирует также ванну, в которой детали небольших размеров размещены на подвеске, автоматическую или полуавтоматическую ванну, в которую загружены подвески различной ширины, и т. д.

1. ПОЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА С ПЛОСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ, ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИ ВСЕ СЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОЛИТА

Поле прямоугольного электролизера с плоскими электродами, перекрывающими все сечение электролита, наиболее легко поддается расчету. Величина и направление вектора напряженности такого поля одинакова во всех точках электролита.

Ток совершенно равномерно распределяется на электродах, следовательно, потенциал электрода, который зависит от плотности тока, также будет иметь одинаковое значение во всех точках. Плотность тока определится из выражения

$$i = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{I}{ah}, \quad (1)$$

где i — плотность тока;
 ρ — удельное сопротивление;
 φ — потенциал;
 I — общая сила тока;
 a и h — размеры электрода.

Сопротивление электролита R в электролизере:

$$R = \rho \frac{l}{ah}, \quad (2)$$

где l — расстояние между электродами.

Полный ток, идущий через электролит, равен

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) ah}{\rho l}, \quad (3)$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы электродов (со стороны электролита).

Выделяемая дифференциальная мощность во всех участках электролита одинакова¹ и равна

$$\frac{dw}{dv} = \rho i^2 = \rho \frac{I^2}{(ah)^2}. \quad (4)$$

Решение задачи осложняется, если длина электродов достаточно велика при малом их сечении и малой электропроводности материала. С таким случаем, в частности, приходится встречаться при гальваностегическом получении биметалла непосредственно в гидроэлектрометаллургических установках. Этот метод совмещения гальваностегических и металлургических процессов был еще в 1938 г. предложен Титовым [43] для получения биметалла железо-медь. Впоследствии он был перенесен также на получение биметалла железо-цинк [46] и железо-свинец [45] и успешно применен в промышленном масштабе [44].

Сравнительно низкое удельное сопротивление железа, малая толщина железных листов при их большой длине вызовут заметное падение напряжения в самом теле электродов, которое может достигнуть десятых долей вольта. Это создаст неравномерное распределение тока на электродах.

Решение такой задачи с учетом падения напряжения в теле электрода, выполненное Тобиасом и Вейсманом, изложено на стр. 74—78.

2. ПОЛЕ ПЛОСКИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

Задача расчета поля плоских полубесконечных электродов, не ограниченных изоляторами в пространстве, известного в литературе под названием поле у края плоского конденсатора, была решена Максвеллом. С помощью преобразования Кристоффеля — Шварца поле двух полубесконечных пластин отображается на верхнюю полуплоскость, после чего преобразуется в однородное поле. В результате получается уравнение, связывающее плотность тока с координатой соответствующей точки на катоде. При этом предполагаем, что катод представляет собой бесконечную пластину, размещенную симметрично между двумя полубесконечными пластинами, т. е. по существу приходим к рассмотрению поля: анод — полубесконечная и катод — бесконечная пластина (рис. 16). Упомянутое уравнение имеет вид:

$$y = \frac{d}{2\pi} [m - 1 + \ln(m - 1)],$$

где y — координата искомой точки на бесконечном катоде;
 m — отношение плотности тока в области равномерного поля i_0 к плотности тока в искомой точке;

¹ Если не учитывать тепло, выделяемое вследствие необратимости процессов на электродах.

$\frac{d}{2}$ — расстояние между бесконечным плоским катодом и полубесконечным анодом.

Задавшись значениями i_0 в однородной области, соответственно получим значения плотностей тока в любой точке катода, что дает возможность построить график распределения тока. При этом на графике целесообразно откладывать не величину y , а $y/\frac{d}{2}$.

В области однородного поля легко определить R_0 — сопротивление трубки, опирающейся на малый участок Δs ; ширину пластинки (в направлении, перпендикулярном чертежу) выбираем равной единице:

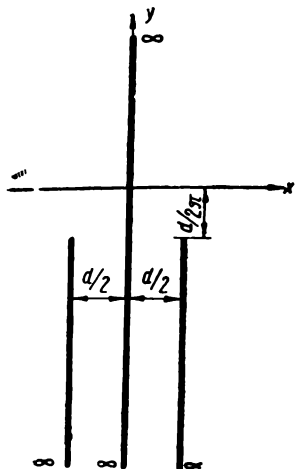


Рис. 16

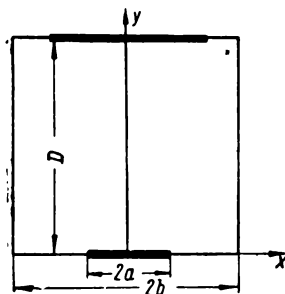


Рис. 17

$$R_0 = \rho \frac{d}{2 \Delta s}. \quad (5)$$

Сопротивление трубки, опирающейся на равновеликий участок Δs с плотностью тока i_i , определится из соотношения $i_0 R_0 = i_i R_i$

$$R_i = \frac{i_0}{i_i} \rho \frac{d}{2 \Delta s}. \quad (6)$$

Затем, используя уравнение (39) (стр. 41), рассчитаем действительную плотность тока с учетом поляризации.

Данные о распределении тока на полубесконечных плоскостях можно использовать для расчета поля электролизера с электродами конечных размеров в случае, если длина электродов превышает расстояние между ними примерно в 2 раза и стенки электролизера удалены на значительное расстояние от одного из электродов.

Представляет интерес работа Вагнера [28], в которой дано

решение задачи поля с учетом электродной поляризации. Это решение приведено с некоторыми сокращениями ниже.

Пусть плоский катод шириной $2a$ и плоский анод помещены непосредственно у стенок прямоугольного электролизера, размеры которого показаны на рис. 17. Рассмотрим случай, когда $D \gg 2a$ и $2b \gg 2a$. При этом можно пренебречь влиянием анода и боковых стенок электролизера на распределение тока на катоде.

Сделаем следующие два допущения, которые, естественно, вносят погрешность:

а) потенциал катода находится в линейной зависимости от плотности тока; в этом случае граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \rho i_0 a + H \varphi \quad (\text{см. стр. 13}); \quad (7)$$

б) вектор напряженности нормален к поверхности катода:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_y = 0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (8)$$

Уравнение Лапласа в плоскопараллельном поле:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (9)$$

На плоскости $y = 0$ в области изолирующей стенки ванны нормальная составляющая градиента потенциала должна обращаться в нуль:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad a < |x| < b. \quad (10)$$

Частное решение уравнения (9), соответствующее потенциалу единичного заряда, может быть представлено в таком виде:

$$\varphi = \ln [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] + c_1, \quad (11)$$

где c_1 — константа;

x_1, y_1 — координаты заряда;

x, y — координаты точки, в которой определяют потенциал.

Для удобства перейдем к безразмерным координатам

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{y}{a}. \quad (12)$$

В рассматриваемом случае заряды располагаются только на поверхности электрода в пределах $-1 \leq \xi \leq +1$.

Плотность заряда является функцией координат ξ . Обозначив ее через $g(\xi)$ и используя принцип суперпозиции (наложения), можем записать общее решение в таком виде:

$$\varphi = \int_{-1}^{+1} g_1(\zeta) \ln[(\xi - \zeta)^2 + \eta] d\zeta + C_2. \quad (13)$$

Для определения $g_1(\zeta)$ найдем градиент потенциала у катода, продифференцировав (13) по η :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_{y=0}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_{\eta=0}} = \lim_{\eta=0} \frac{1}{a} \int_{-1}^{+1} \frac{2\eta g_1(\zeta) d\zeta}{(\xi - \zeta)^2 + \eta^2}. \quad (14)$$

Функция $\frac{\eta}{(\xi - \zeta)^2 + \eta^2}$ при $\eta \rightarrow 0$ обращается в нуль при всех значениях ζ , за исключением точки $\zeta = \xi$, где эта функция обращается в бесконечность. Поэтому, не изменяя конечного результата при достаточно малом η , пределы интегрирования можно изменить на $\pm\infty$. Функцию $g_1(\xi)$ можно вынести из-под знака интеграла и, преобразовав подинтегральную функцию, привести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{y=0}} &= \frac{g_1(\xi)}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\eta d\zeta}{(\xi - \zeta)^2 + \eta^2} = \\ &= \frac{2g_1(\xi)}{a} \operatorname{arctg} \frac{\xi - \zeta}{\eta} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{a} g_1(\xi). \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнений (7) и (13) можно получить

$$g_1(\xi) = \frac{H}{\pi} \int_{-1}^{+1} g_1(\zeta) \ln[\xi - \zeta] d\zeta + \frac{\rho i_0 a}{2\pi} + C. \quad (16)$$

Выражение (16) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Уравнение (16) можно упростить путем подстановки

$$p(\xi) = \frac{g_1(\xi)}{\frac{i_0 a \rho}{2\pi} + C}. \quad (17)$$

Тогда (12) примет вид

$$p(\xi) = 1 + \frac{H}{\pi} \int_{-1}^{+1} p(\zeta) \ln(\xi - \zeta) d\zeta. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) может быть приближенно представлено в виде:

$$p(\xi) = \frac{1}{1 + \frac{H}{\pi} [2 - (1 + \xi) \ln(1 + \xi) - (1 - \xi) \ln(1 - \xi)]}. \quad (19)$$

По данным Вагнера при значениях $\frac{H}{\pi} < \frac{1}{2}$ погрешность при использовании (17) не превышает 3%, что вполне приемлемо для технических расчетов.

Распределение тока на исследуемом электроде может быть охарактеризовано отношением локальной плотности i_l к средней плотности тока i_{cp} , которое, учитывая (3), (15) и (16), может быть представлено в виде

$$\frac{i_l}{i_{cp}} = \frac{p(\xi)}{\int_{-1}^{+1} p(\xi) d\xi} \quad (20)$$

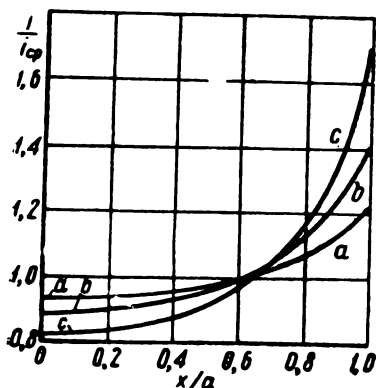


Рис. 18. Распределение тока на катоде:

- a) $\frac{1}{\frac{H}{\pi}} = \frac{4}{\pi} = 1,27$;
 b) $\frac{1}{\frac{H}{\pi}} = \frac{2}{\pi} = 0,64$;
 c) $\frac{1}{\pi} = 0,32$ (по К. Вагнеру)

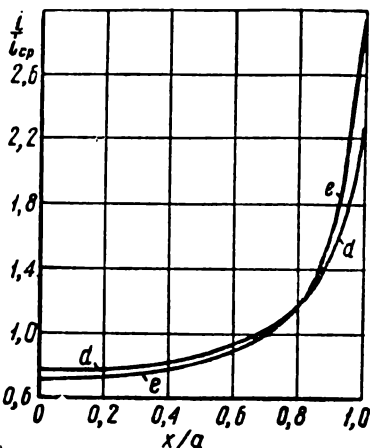


Рис. 19. Распределение тока на катоде:

- d) $\frac{1}{\frac{H}{\pi}} = \frac{0,5}{\pi} = 0,16$;
 e) $\frac{1}{\frac{H}{\pi}} = \frac{0,25}{\pi} = 0,08$
 (по К. Вагнеру)

На рис. 18 и 19 представлены графики распределения тока на электроде при различных значениях H , составленные на основе данных расчета по формуле (20).

В предельном случае, когда можно пренебречь поляризацией, эта же задача может быть решена с помощью конформных отображений. Для этого исследуемую полуплоскость z отображаем на полубесконечную полосу с помощью преобразования

$$w = \arcsin \frac{z}{a} \quad (21)$$

В результате получаем формулу:

$$\frac{i}{i_{cp}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \quad (22)$$

Вагнер решил также задачу о распределении тока на полу-

бесконечных плоских параллельных электродах, продолжением которых служат полубесконечные изолирующие стенки (рис. 20). При этом он принял упрощающие допущения о линейной зависимости потенциала от плотности тока и нормальности направления вектора напряженности по отношению к поверхности электродов и использовали метод решения, изложенный выше. Полученное уравнение имеет вид:

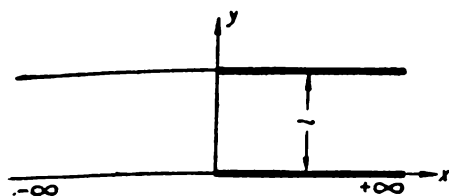


Рис. 20

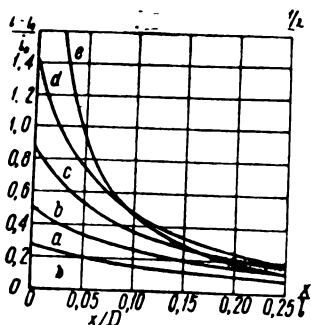


Рис. 21. Распределение тока на катоде:

a) $\frac{1}{H} = \frac{8}{\pi^2} = 0,8;$

b) $\frac{1}{H} = \frac{4}{\pi^2} = 0,4;$

c) $\frac{1}{H} = \frac{2}{\pi^2} = 0,2;$

d) $\frac{1}{H} = \frac{1}{\pi^2} = 0,1;$

e) $\frac{1}{H} = 0$ (по К. Вагнеру)

$$p(\xi) = \frac{2H}{\pi^2} \left\{ f(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^\infty p(\zeta) \ln [\operatorname{th}^2(\xi - \zeta) d\zeta] \right\}, \quad (23)$$

где $\xi = \frac{x\pi}{2l}.$

$$f(\xi) = \frac{1}{4} \pi^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \ln \operatorname{th}^2(\xi - \zeta) d\zeta. \quad (24)$$

Отношение локальной плотности тока i к плотности тока в области равномерного поля i_0 (т. е. в области, удаленной на большое расстояние от концов электродов) определяют из формулы:

$$\frac{i}{i_0} = 1 + p(\xi). \quad (25)$$

Если $\frac{2H}{\pi^2} \ll 1$, то справедлива приближенная формула:

$$\frac{i}{i_0} = 1 + \frac{2H}{\pi^2} f\left(\frac{\pi x}{2l}\right). \quad (26)$$

Кривые распределения тока согласно (25) представлены на рис. 21.

Решение задачи упрощается, если можно пренебречь поляризацией. Полученная для неполяризованных электродов формула имеет вид:

$$t = i_0 \frac{1}{\sqrt{1 - e^{\frac{-2\pi x}{l}}}}. \quad (27)$$

Формулами (21), (22) и (23) можно практически пользоваться для расчета распределения тока на одинаковых по длине плоских электродах, если их длина и расстояние от краев электродов до дна электролизера намного превышают расстояние между электродами.

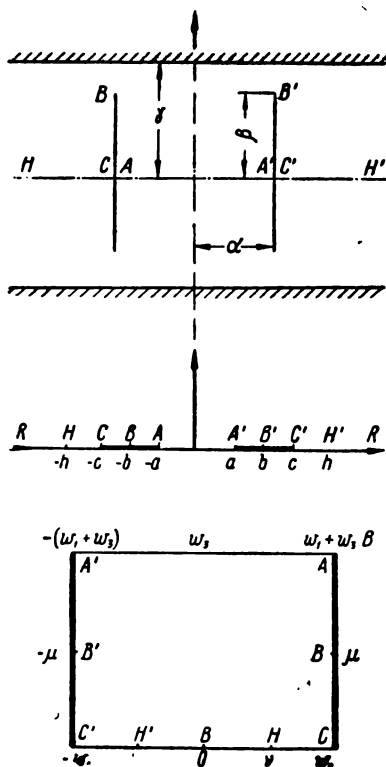


Рис. 22. К расчету распределения тока на электроде (по Нине, Иосизава, Окада)

3. ПОЛЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОДОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Более важную для технической электрохимии конфигурацию поля исследовали Балабуха [47] и позднее Нине, Иосизава и Окада [48]. Ими было рассмотрено поле двух одинаковых по величине плоских параллельных неполяризованных электродов конечной длины, расположенных на равном расстоянии от стенок электролизера (рис. 22). При этом было сделано допущение о том, что стенки электролизера, ограничивающие электролит с тыльной стороны электродов, удалены на бесконечность.

Вкратце изложим ход решения указанной задачи. С помощью формулы Кристоффеля — Шварца отобразим область плоскости z (рис. 22) с границей $OA'B'C'H'RHCSBAO$ на верхнюю полуплоскость t с соответствием точек границ, указанным на рис. 22. Это отображение имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = M \frac{t^2 - b^2}{\sqrt{t^2 - a^2} \sqrt{t^2 - c^2} (t^2 - h^2)}, \quad (28)$$

где постоянные a , b , c и h соответствуют точкам A , B , C и H на плоскости t .

Отобразим далее верхнюю полуплоскость t на область в плоскости s , изображенную на рис. 22, с помощью преобразования

$$t^2 = \zeta^2(\zeta) - e_3, \quad (29)$$

где $\wp(\zeta)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, имеющая два периода — $2\omega_1$ и $2\omega_3$:

$$\left(\omega_1 > 0 \text{ и } \frac{\omega_3}{i} > 0\right), \text{ а } e_3 = \wp(\omega_3).$$

Используя дифференциальное уравнение для функций Вейерштрасса и формулу (29), можно написать:

$$\frac{dz}{ds} = M \frac{\wp(\zeta) - \wp(\mu)}{\wp(\zeta) - \wp(\nu)}. \quad (30)$$

С помощью соотношений между эллиптическими функциями и заданных размеров α , β и γ (см. рис. 22) можно найти постоянные M , μ и ν . В результате получается следующая формула для напряженности поля на электроде:

$$E = -i \frac{\pi}{\gamma} \cdot \frac{\wp(\nu) - \wp(\mu)}{\wp(\nu)} \cdot \frac{\wp(\zeta) - \wp(\nu)}{\wp(\zeta) - \wp(\mu)}. \quad (31)$$

Расчеты, проведенные по формуле (31), показывают, что расстояние от боковой стенки до электродов оказывает существенное влияние на распределение нагрузки между их лицевой и тыльной сторонами. Это, например, имеет непосредственное значение для электролитического лужения, так как для нормальной работы анодов необходимо, чтобы плотность тока на наименее нагруженном участке не была ниже некоторого предельного значения. В противном случае в раствор будут переходить ионы двухвалентного олова, что приведет к ухудшению качества катодного осадка.

На рис. 23—25 приведены диаграммы распределения тока на электродах при различном значении параметров β и γ , а на рис. 26 — кривые распределения тока между внутренней (лицевой) и внешней (тыльной) поверхностями электродов в зависимости от соотношения параметров α , β и γ .

Допущение об отсутствии стенок с тыльной стороны электродов снижает практическую ценность полученных результатов. Так, в гидроэлектрометаллургических установках все электроды, кроме двух крайних, размещают так, что каждый катод находится между парой анодов, а каждый анод — между парой катодов. В гальванических ваннах подвески с покрываемыми предметами (катод) всегда размещают между двумя параллельными плоскими анодами. Если выделить в поле элемент симметрии (рис. 27), то линии, являющиеся продолжениями плоских электродов, будут являться силовыми. Ясно, что каждая из этих силовых линий может быть заменена изолирующей стенкой. Поэтому случаи переноса изолирующей стенки с тыльной стороны электродов в бесконечность редко встречаются в практике. Помимо того размеры анода и катода, как правило, разные.

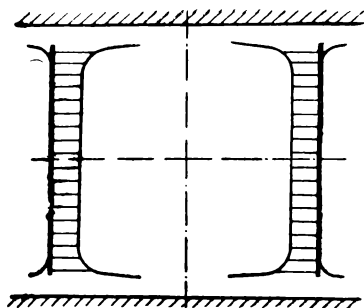


Рис. 23. Распределение тока на электродах:

$$\frac{\beta}{\gamma} = 0,8405 \quad (\text{по Нине, Иосизава, Окада})$$

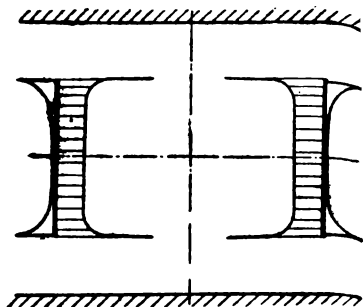


Рис. 24. Распределение тока на электродах:

$$\frac{\beta}{\gamma} = 0,579 \quad (\text{по Нине, Иосизава, Окада})$$

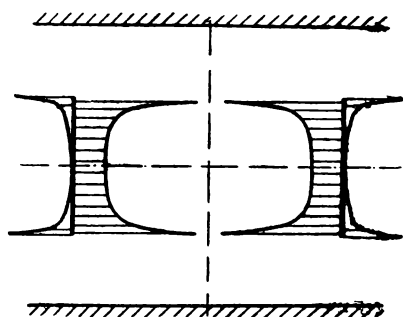
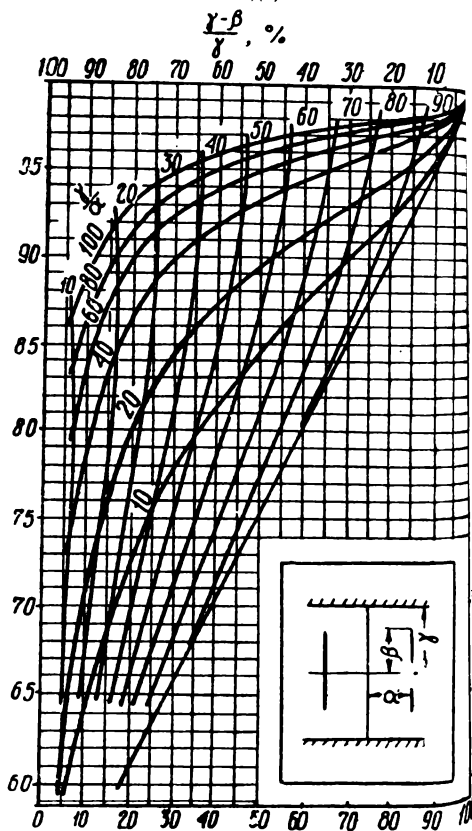


Рис. 25. Распределение тока на электродах:

$$\frac{\beta}{\gamma} = 0,496 \quad (\text{по Нине, Иосизава, Окада})$$

Рис. 26. Распределение тока между лицевой и тыльной сторонами электродов (по Нине, Иосизава, Окада)

На оси абсцисс отложена ширина электродов в процентах к расстоянию между стенками троллеизера; на оси ординат (слева) — сила тока на лицевой стороне электродов по отношению к силе тока



Задача распределения тока на электродах в поле двух параллельных электродов конечных и разных размеров, помещенных в электролите, ограниченном непроводящими стенками (рис. 28), была решена нами совместно с В. М. Цукерником [49]. Для этого же поля ранее Смирновым [50] было рассчитано сопротивление. Указанная конфигурация моделирует весьма распространенные случаи промышленной практики: гидроэлектрометаллургические установки (рис. 27, б) и гальванические ванны (рис. 27, а и в).

Рассмотрим поле, изображенное на рис. 28.

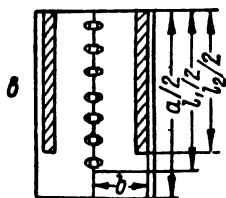
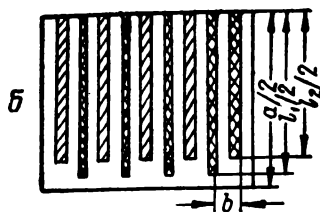
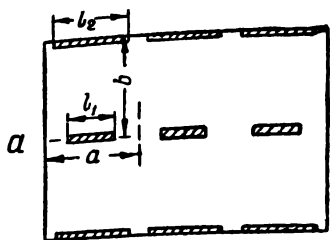


Рис. 27. Схемы гальванических ванн (а, в) и гидроэлектрометаллургической установки (б)

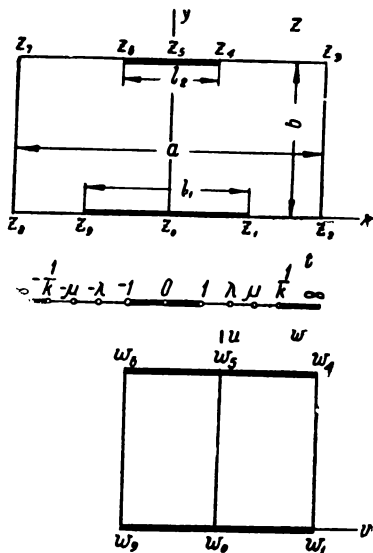


Рис. 28. К расчету распределения тока на электродах

В отсутствии поляризации поверхности рассматриваемых электродов $z_1 z_9$ и $z_4 z_6$ эквипотенциальны. Положим потенциал анода $\psi_a = \psi$ и потенциал катода $\psi_k = 0$.

Отобразим конформно область, ограниченную прямоугольником на рис. 28, на верхнюю полуплоскость так, чтобы точки z_0, z_5 переходили соответственно в точки $0, 1 \infty$ на вещественной оси. При этом точки z_2, z_3, z_4 перейдут в некоторые точки λ, μ и $\frac{1}{k}$.

вещественной оси, причем благодаря сохранению направления обхода границ $1 < \lambda < \mu < \frac{1}{k}$.

Тогда искомое отображение можно получить при помощи интеграла Кристоффеля — Шварца, который в данном случае, при указанном соответствии точек границ, имеет вид:

$$z = C \int_0^t (t - \lambda)^{\frac{1}{2} - 1} (t + \lambda)^{\frac{1}{2} - 1} (t - \mu)^{\frac{1}{2} - 1} (t + \mu)^{\frac{1}{2} - 1} dt =$$

$$= C \int_0^t \frac{dt}{V(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}. \quad (32)$$

Значения постоянных c , λ , μ и k определяются из уравнений:

$$\frac{a}{2} = C \int_0^\lambda \frac{dt}{V(\lambda^2 - t^2)(\mu^2 - t^2)}; \quad (33)$$

$$\frac{l_1}{2} = C \int_0^1 \frac{t dt}{V(\lambda^2 - t^2)(\mu^2 - t^2)}; \quad (34)$$

$$b = C \int_0^\mu \frac{dt}{V(t^2 - \lambda^2)(\mu^2 - t^2)}; \quad (35)$$

$$\frac{l_2}{2} = C \int_{\frac{1}{k}}^\infty \frac{dt}{V(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}, \quad (36)$$

выражающих размеры электродов и электролизера. Интегралы (33), (34), (35) и (36) являются эллиптическими. Приведем их к каноническому виду путем замены переменной интегрирования $t = \frac{\mu}{\sin \varphi}$.

Вводя переменную φ из уравнения $t = \lambda \sin \varphi$ в (33) и (34), из уравнения $t = \frac{\mu}{\sin \varphi}$ в (36) и из уравнения $t^2 = \mu^2 - (\mu^2 - \lambda^2) \times \sin^2 \varphi$ в (35), получим:

$$\frac{l_1}{2} = \frac{C}{\mu} \int_0^{\arcsin \frac{1}{\lambda}} \frac{d\varphi}{V1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}; \quad (37)$$

$$\frac{a}{2} = \frac{C}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}}; \quad (38)$$

$$b = \frac{C}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}}; \quad (39)$$

$$\frac{l_2}{2} = \frac{C}{\mu} \int_0^{\arcsin k\mu} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}}. \quad (40)$$

Интегралы (37) — (40) удобнее для вычислений, поскольку они табулированы. Для нахождения постоянных C , λ , μ и k вычисления проводят следующим образом.

Из (38) и (39)

$$\frac{K\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\right)}{K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = 2 \frac{b}{a}, \quad (41)$$

где

$$K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}} \quad (42)$$

полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Из (41) при данных a и b находят отношение $\frac{\lambda}{c}$ с помощью табл. 2, составленной Смирновым, а по найденному значению $\frac{\lambda}{\mu}$ находят $K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

Из (41) и (42) находим:

$$\frac{l_1}{a} K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \int_0^{\arcsin \frac{1}{\lambda}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}}. \quad (43)$$

Соотношения между элементами полных эллиптических интегралов первого рода
(по В. И. Смирнову)

$\theta_m = \arcsin k$	$k = \sin \theta_m$	K	$\theta'_m = 90^\circ - \theta_m$	$k' = \sin \theta'_m$	$K(k')$	$\frac{K(k')}{K(k)}$	$\frac{K(k)}{K(k')}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0°00'01''	0,000 005	1,571	89°59'59''	0,999 999 999 99	13,60	8,66	0,116
0°00'10''	0,000 048	1,571	89°59'50''	0,999 999 999	11,33	7,21	0,139
0°01'30''	0,000 436	1,571	89°58'30''	0,999 999 905	9,12	5,81	0,173
0°7'	0,002 04	1,571	89°53'	0,999 997 93	7,58	4,82	0,207
0°24'	0,007	1,571	89°36'	0,999 976	6,35	4,05	0,248
1°12'	0,021	1,571	88°48'	0,999 78	5,25	3,34	0,299
3°	0,052	1,572	87°	0,998 63	4,34	2,76	0,363
7°	0,122	1,577	83°	0,992 5	3,50	2,22	0,451
13°	0,225	1,591	77°	0,974	2,90	1,82	0,549
21°	0,358	1,625	69°	0,934	2,46	1,51	0,660
33°	0,545	1,712	57°	0,839	2,08	1,21	0,823
45°	0,707	1,854	45°	0,707	1,85	1,00	1,000
$\theta'_m = 90^\circ - \theta_m$	$k' = \sin \theta'_m$	$K(k')$	$\theta_m = \arcsin k$	$k = \sin \theta$	$K(k)$	$\frac{K(k)}{K(k')}$	$\frac{K(k')}{K(k)}$

Отсюда по таблице эллиптических интегралов находят λ при данных $\frac{\lambda}{\mu}$ и $K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$. По данным λ и $\frac{\lambda}{\mu}$ находят μ . Из (38) и (40):

$$\frac{l_2}{a} K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \int_0^{\arcsin \mu k} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}}. \quad (44)$$

Это равенство позволяет найти k . Наконец, из (38) находим

$$C = \frac{\mu a}{2K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}. \quad (45)$$

Для окончательного решения задачи отобразим конформно верхнюю полуплоскость на область, ограниченную прямоугольником в плоскости w комплексного потенциала, с соответствием точек $(0, 1, \frac{1}{k}) \sim (0, w_1, w_4)$. Это отображение дается интегралом

$$w = C' \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \quad (46)$$

Участок $w_4 w_6$ в плоскости w соответствует аноду $z_4 z_6$ в плоскости z . Поэтому на участке $w_4 w_6$ $\text{Im } w = \psi$, где ψ — потенциал анода. Тогда из (46)

$$\psi = C' \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \quad (47)$$

Вводя новую переменную интегрирования φ с помощью равенства $t^2 = \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right) \sin^2 \varphi$, получим

$$\psi = C' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1-k^2) \sin^2 \varphi}} = C' K(\sqrt{1-k^2}).$$

Отсюда

$$C' = \frac{\psi}{K(\sqrt{1-k^2})}. \quad (48)$$

Формулы (46) и (32) дают искомое распределение потенциала в параметрической формуле.

Найдем теперь напряженность поля. Как известно, величина напряженности поля выражается равенством $E = \left| \frac{dw}{dz} \right|$. В нашем случае это дает

$$E = \left| \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \right| = \frac{C'}{C} \left| \frac{V \sqrt{(t^2 - \lambda^2)(t^2 - \mu^2)}}{V \sqrt{(t^2 - 1)(k^2 t^2 - 1)}} \right|. \quad (49)$$

Для определения напряженности поля на катоде следует учесть, что на катоде z вещественно, причем $|z| \leq \frac{l_1}{2}$. На плоскости t этому соответствует отрезок $|t| \leq 1$ вещественной оси. Поэтому для точек катода из (49) получаем:

$$E = \frac{C'}{C} \sqrt{\frac{(\lambda^2 - t^2)(\mu^2 - t^2)}{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \quad (t^2 \leq 1). \quad (50)$$

Для исключения параметра t заменим в (32) переменную, вводя новую переменную интегрирования $\tau = \frac{t}{\lambda}$.

Тогда

$$z = \frac{C}{\mu} \int_0^{\frac{t}{\lambda}} \frac{d\tau}{V \sqrt{(1 - \tau^2) \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \tau^2\right)}}. \quad (51)$$

Положив $\tau = \sin \varphi$, получим

$$z = \frac{C}{\mu} \int_0^{\arcsin \frac{t}{\lambda}} \frac{d\varphi}{V \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}}. \quad (52)$$

На катоде $y = 0$, $z = x$, откуда

$$\frac{\mu x}{C} = \int_0^{\arcsin \frac{t}{\lambda}} \frac{d\varphi}{V \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \sin^2 \varphi}}. \quad (53)$$

Задаваясь значениями x из (53), по таблице эллиптических интегралов [51] находим $\frac{t}{\lambda}$, затем t и определяем напряженность E в точке x . Используя известное соотношение, находим плотность тока $i_p = \frac{E}{\rho}$.

При достаточно больших расстояниях между электродами и малой поляризуемости электродов в кислых электролитах действительное распределение плотностей тока будет в малой степени отличаться от расчетного, поэтому данные расчета могут быть непосредственно использованы для выбора оптимальных геометрических параметров электролизеров.

Для расчета распределения тока с учетом поляризации используем предложенный нами метод. Положим минимальную плотность тока равной i_{0p} . Рассчитав плотности тока без учета поляризации, по поляризационной кривой находим для каждого участка значение катодного потенциала.

Далее составляем эквивалентную схему, в которой силовые трубки представлены в виде системы параллельно соединенных проводников. Положив равным нулю потенциал участка катода в точке с плотностью тока i_{0p} и потенциалом , соответственно для каждого участка катода определим величину потенциала $(\psi_{ki} - \psi_0) = \Delta \psi_{ki} = f(i_i)$.

Составляем расчетное уравнение для каждого участка:

$$i_0 l \frac{ds}{dG_0} = i_i h \frac{ds}{dG_i} + f(i_i), \quad (54)$$

где $f(i_i) = \Delta \psi_{ki}$ — приращение потенциала катода на участке x_i относительно потенциала участка с плотностью тока i_{0p} ;

i_0 — минимальная плотность тока;

i_i — плотность тока на участке x_i с учетом катодной поляризации;

dG_0 — проводимость трубки электролита, опирающейся на участок с минимальной плотностью тока;

dG_i — проводимость трубки электролита, опирающейся на участок с плотностью тока i_i ;

h — размер электродов в направлении, перпендикулярном рассматриваемой плоскости.

Уравнение (54) может быть легко решено относительно i графически или методом итерации.

Предварительно для решения уравнения (54) определяем проводимость трубок электролита, опирающихся на соответствующий участок катода, из соотношения:

$$\frac{I}{G_s} = i_{ip} h \frac{ds}{dG_i}, \quad (55)$$

где i_{ip} — расчетная плотность тока (без учета поляризации);

G_s — проводимость электролита в рассматриваемом электролизере, которая рассчитывается по формуле, введенной Смирновым:

$$R_s = \frac{1}{G_s} = \frac{K(k') \rho}{2K(k) h} . \quad (56)$$

Ход расчета по этой формуле подобен изложенному на стр. 65.

В графе 7 табл. 2 отыскиваем заданное отношение $2\frac{b}{a}$, равное

$$\frac{K\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}}\right)}{K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)},$$

и в соответствующей строке графы 2 (или ин-

терполируя) находим величину модуля $\frac{\lambda}{\mu}$.

Затем в графах 1 и 3 находим величину $\arcsin \frac{\lambda}{\mu}$ и интеграла $K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$. Определив величину левой части (43) по заданному значению $\frac{l_1}{a}$ и найденному $K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, по таблице эллиптических интегралов находим амплитуду $\varphi = \arcsin \frac{1}{\lambda}$ и затем λ и μ . Затем, зная $K\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ и заданное значение $\frac{l_2}{a}$, определяем из (44) K и по его значению — R .

Распределение тока на электродах в рассматриваемом электролизере существенно зависит от соотношения геометрических параметров, что видно из рис. 29—39.

Приведенные на рис. 29—33 кривые построены по экспериментальным данным.

Из рис. 30 и 31 следует, что увеличение междуэлектродного расстояния приводит к увеличению нагрузки на крае катода, а также к увеличению неравномерно нагруженной его области. Вместе с тем при некотором соотношении геометрических параметров увеличение расстояния приводит вначале к увеличению, а в дальнейшем к уменьшению нагрузки на край катода и соответственно к большей равномерности покрытия (рис. 32).

Для случая, когда длина анода меньше длины катода, увеличение междуэлектродного расстояния приводит к уменьшению нагрузки на область катода, находящуюся непосредственно против анода (см. рис. 30).

При одном и том же абсолютном различии в длине электродов нагрузка на край электрода будет тем больше, чем дальше отстоят электроды от дна ванны (рис. 33).

Из графиков 34, 35 и 36 видно, что с уменьшением длины катода увеличиваются нагрузка на его край, а также неравномерность распределения тока. Увеличению нагрузки на край катода

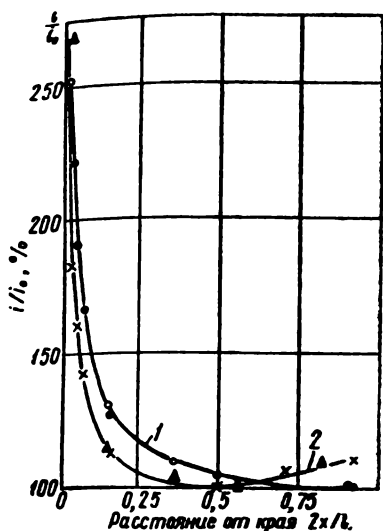


Рис. 29. Распределение тока на электроде:

1 — $l_1 = 432$; $l_2 = 596$; $b = 248$; $a = 596$;
2 — $l_1 = 432$; $l_2 = 336$; $b = 248$; $a = 596$;

$\frac{i}{i_0}$ — отношение плотности тока в данной точке i к минимальной плотности i_0 ;
 $\frac{2x}{l_1}$ — отношение расстояния от края

катода x к половине его длины $\frac{l}{2}$

▲, о — экспериментальные данные; ●,
× — расчетные данные

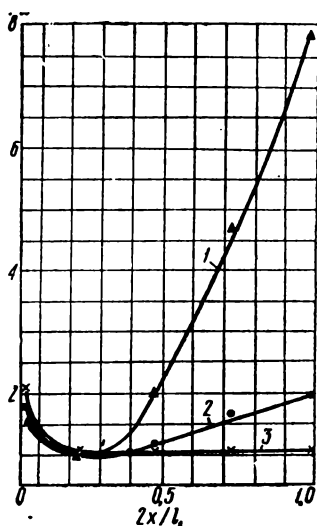


Рис. 30. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_1 = 432$; $l_2 = 106$; 1 —
— $b = 65$; 2 — $b = 150$; 3 — $b = 248$

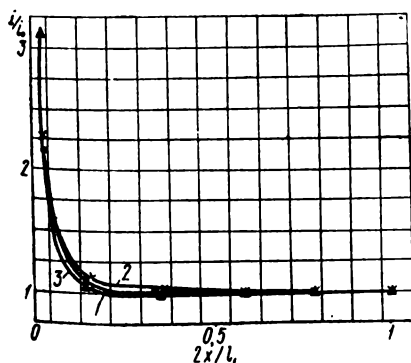


Рис. 31. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_1 = 536$; $l_2 = 596$; 1 — $b = 65$;
2 — $b = 150$; 3 — $b = 248$

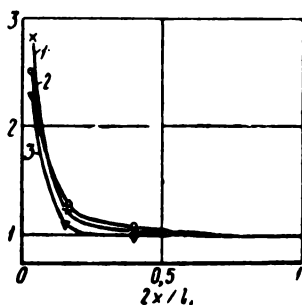


Рис. 32. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_1 = 432$; $l_2 = 596$; 1 — $b = 150$;
2 — $b = 248$; 3 — $b = 65$

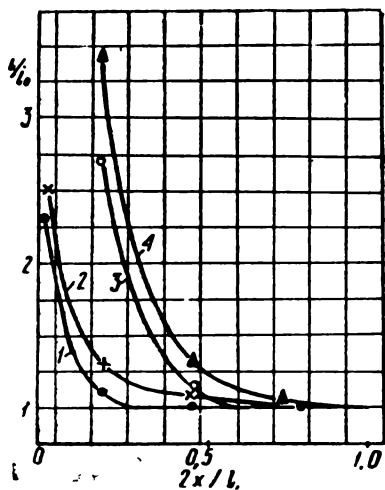


Рис. 33. Распределение тока на электроде:

$a = 695$; $l_2 - l_1 = 164 - 166$; 1 — $l_2 = 596$; $l_1 = 432$; 2 — $b = 65$; 3 — $l_1 = 40$; 4 — $b = 248$; $l_2 = 506$; $l_1 = 248$; 3 — $b = 65$; 4 — $b = 248$

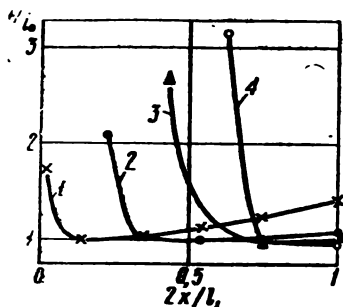


Рис. 34. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_2 = 106$; $b = 248$; 1 — $l_1 = 536$; 2 — $l_1 = 432$; 3 — $l_1 = 340$; 4 — $l_1 = 236$

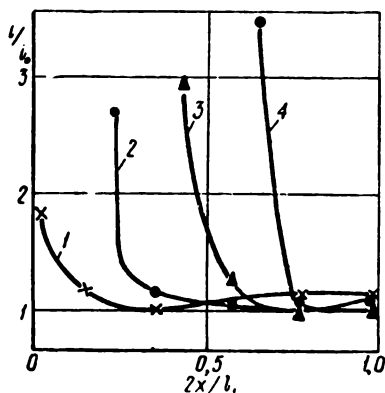


Рис. 35. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_2 = 336$; $b = 248$; 1 — $l_1 = 536$; 2 — $l_1 = 432$; 3 — $l_1 = 340$; 4 — $l_1 = 236$

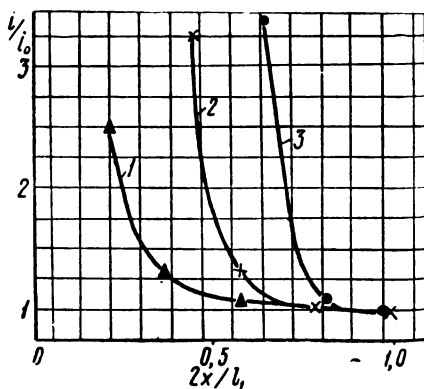


Рис. 36. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_2 = 598$; $b = 248$; 1 — $l_1 = 432$; 2 — $l_1 = 340$; 3 — $l_1 = 236$

способствует также увеличение длины анода, что видно из рис. 36 и 37. В то же время уменьшение длины анода увеличивает нагрузку на участки катода, лежащие на одной высоте с анодом.

Такое увеличение нагрузки может стать значительным при небольшой величине междуэлектродного расстояния (рис. 38).

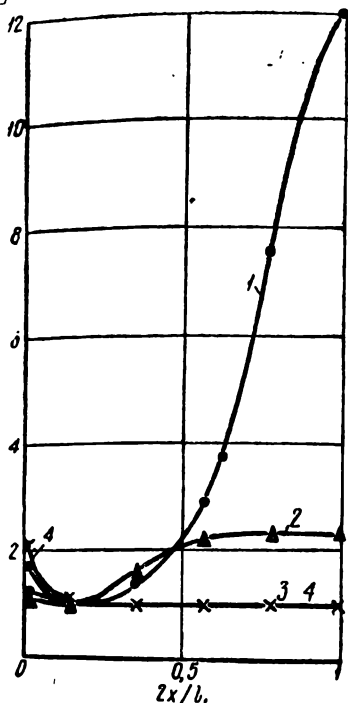


Рис. 37. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_1 = 532$; $b = 65$; 1 — $l_2 = 106$; 2 — $l_2 = 336$; 3 — $l_2 = 506$; 4 — $l_2 = 596$

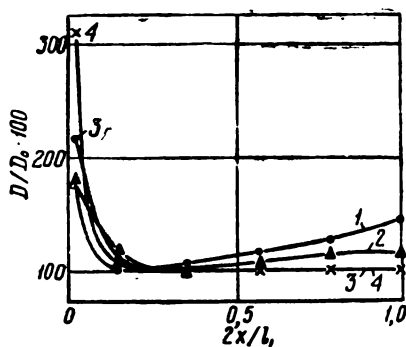


Рис. 38. Распределение тока на электроде:

$a = 596$; $l_1 = 532$; $b = 248$; 1 — $l_2 = 106$; 2 — $l_2 = 336$; 3 — $l_2 = 506$; 4 — $l_2 = 596$

4. НЕРАВНОМЕРНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА, ВЫЗВАННАЯ ПАДЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛА В ТЕЛЕ ПЛОСКИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

Если сечение электродов невелико, то при достаточно большой их длине на распределении тока будет сказываться падение потенциала в самом металле. Даже в случае плоских параллельных проводников, пересекающих электролит по всему сечению, распределение тока будет неравномерным. Этот случай, представляющий практический интерес, будет рассмотрен ниже. Само решение, предложенное Тобиасом и Вайсманом [29], представляет несомненный методический интерес.

Рассмотрим после между двумя плоскими электродами (рис. 39), бесконечными в направлении оси z и ограниченными изоляторами в плоскостях $x = 0$ и $x = l$. Расстояние между электродами равно d .

При нахождении поля между электродами будем учитывать падение напряжения в теле электродов и поляризацию. При этом допустим, что скачок потенциала на каждом из электродов линейно зависит от плотности тока.

Задача сводится к решению уравнения Лапласа (двухмерного) с граничными условиями, учитывающими как поляризацию, так и падение напряжения между электродами.

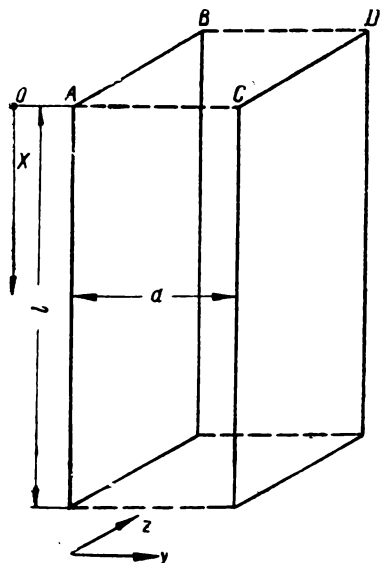


Рис. 39

Наиболее удобно граничные условия могут быть сформулированы с помощью функции тока, которая вместе со своими производными на обоих электродах непрерывна (в отличие от потенциала).

Уравнение Лапласа для функции тока имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (57)$$

В соответствии с условиями Коши — Римана

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial \psi}{\partial y} = \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (58)$$

где ψ — потенциал;

κ — удельная электропроводность.

Поскольку функция тока определена с точностью до аддитивной постоянной, можно положить $\psi = 0$ при $x = 0$. Тогда при $x = l$ $\psi = \psi_l$, где ψ_l — полный ток в электролите. Таким образом, на границе электролита с изолятором должны выполняться граничные условия:

$$\psi_{(0, y)} = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq d, \quad (59a)$$

$$\psi_{(l, y)} = \psi_l \text{ при } 0 \leq y \leq d. \quad (59b)$$

Граничное условие на первом электроде, учитывающее поляризацию, может быть записано в таком виде:

$$-\varphi_{n_1} = \varphi_0 + b_0 \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x}, \quad (60)$$

где $\varphi_m - \varphi_{n_1}$ — скачок потенциала на электроде (φ_m — потенциал металла);

φ_0 — скачок потенциала при нулевой плотности тока;

b_0 — постоянный множитель.

Учет падения напряжения в теле электрода приводит к следующему условию:

$$\frac{\partial \varphi_m(x, 0)}{\partial x} = -r_0 [\psi_l - \psi(x, 0)], \quad (61)$$

где r_0 — сопротивление 1-го электрода, отнесенное к единице длины в направлении z и в направлении x ;

$\psi_l - \psi(x, 0)$ — ток, протекающий через сечение электрода в точке $(x, 0)$.

Продифференцируем (60) по x :

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial x} = b_0 \frac{\partial^2 \psi(x, 0)}{\partial x^2}. \quad (62)$$

Из (61) и (62) получаем

$$\frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial x} = -r_0 [\psi_l - \psi(x, 0)] - b_0 \frac{\partial^2 \psi(x, 0)}{\partial x^2}$$

или, заменяя $\frac{d\varphi_{n1}}{dx}$ с помощью (58):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -r_0 \times [\psi_l - \psi] - b_0 \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ при } y = 0. \quad (63)$$

Аналогично для второго электрода:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = r_d \times [\psi_l - \psi] + b_d \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ при } y = d, \quad (64)$$

где r_d и b_d — постоянные для второго электрода, соответствующие r_0 и b_0 для первого электрода.

Будем искать решение уравнения (57) с граничными условиями (59а) и (59б) в виде

$$\psi_1 = \psi_l \frac{x}{l} + X(x) Y(y).$$

Первое слагаемое $\psi_l \frac{x}{l}$ представляет собой решение уравнения Лапласа с граничными условиями (59) и (60) без учета поляризации и падения напряжения в теле электродов. Функции $X(x)$ и $Y(y)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{и} \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0, \quad (65)$$

где λ — вещественный параметр.

Находим общее решение уравнений (65):

$$X = C \sin \lambda x + D \cos \lambda x \quad \text{и} \quad Y = A \operatorname{sh} \lambda y + B \operatorname{ch} \lambda y. \quad (66)$$

Функция ψ_1 должна удовлетворять граничным условиям (59)

и (60). Отсюда следует, что $X(x)$ должна удовлетворять граничным условиям:

$$X(0) = 0 \text{ и } X(l) = 0.$$

Из условия $X(0) = 0$ следует, что $D = 0$, а из условия $X(l) = 0$ следует $\lambda = \frac{n\pi}{l}$.

Таким образом, получаем частное решение уравнения Лапласа:

$$\psi_1 = \psi_l \left[\frac{x}{l} + \left(A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \quad (67)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Для окончательного решения задачи следует удовлетворить граничным условиям (63) и (64), что можно сделать с помощью суперпозиции решений (67):

$$\psi(x, y) = \psi_l \left[\frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]. \quad (68)$$

Коэффициенты A_n и B_n находят из граничных условий (63) и (64). Из (68) найдем значения $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ при $y = 0$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} A_n \sin n\pi \frac{x}{l} \text{ при } y = 0; \quad (69)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\psi_l \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 B_n \sin n\pi \frac{x}{l} \text{ при } y = 0. \quad (70)$$

Подставляя (69) и (70) в (63), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{l} A_n - r_0 \times B_n - b_0 \times \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 B_n \right] \sin n\pi \frac{x}{l} = \\ = -r_0 \times \left(1 - \frac{x}{l} \right). \end{aligned} \quad (71)$$

Введем безразмерные параметры:

$$\lambda_0 = r_0 \times l, \quad \lambda_d = r_d \times l, \quad \mu_0 = \frac{b_0 \times}{l} \text{ и } \mu_d = \frac{b_d \times}{l}. \quad (72)$$

С помощью (72) получаем из (71):

$$\sum_{n=1}^{\infty} [n \pi A_n - (\lambda_0 + n^2 \pi^2 \mu_0) B_n] \sin n \pi \frac{x}{l} = -\lambda_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right). \quad (73)$$

Коэффициент при $\sin n \pi \frac{x}{l}$ в левой части (73) находят как коэффициент Фурье функции $-\lambda_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$.

В результате получаем уравнение:

$$n \pi A_n - (\lambda_0 + n^2 \pi^2 \mu_0) B_n = -\frac{2}{n \pi} \lambda_0. \quad (74)$$

Аналогично, используя граничные условия (64), получим уравнение:

$$n \pi \left(B_n \operatorname{sh} n \pi \frac{d}{l} + A_n \operatorname{ch} n \pi \frac{d}{l} \right) + (\lambda_d + n^2 \pi^2 \mu_d) \left(A_n \operatorname{sh} n \pi \frac{d}{l} + B_n \operatorname{ch} n \pi \frac{d}{l} \right) = \frac{2}{n \pi} \lambda_d. \quad (75)$$

Из уравнений (74) и (75) определяем A_n и B_n .

$$A_n = \frac{2}{n \pi} \cdot \frac{1}{C_n} \left[\lambda_d (\lambda_0 + n^2 \pi^2 \mu_0) - n \pi \lambda_0 \operatorname{sh} n \pi \frac{d}{l} - \lambda_0 (\lambda_d + n^2 \pi^2 \mu_d) \operatorname{ch} n \pi \frac{d}{l} \right]; \quad (76)$$

$$B_n = \frac{2}{n \pi} \cdot \frac{1}{C_n} \left[n \pi \lambda_d + \lambda_0 (\lambda_d + n^2 \pi^2 \mu_d) \operatorname{sh} n \pi \frac{d}{l} + n \pi \lambda_0 \operatorname{ch} n \pi \frac{d}{l} \right], \quad (77)$$

где

$$C_n = [\lambda_0 \lambda_d + n^2 \pi^2 (1 + \lambda_0 \mu_d + \lambda_d \mu_0) + n^4 \pi^4 \mu_0 \mu_d] \operatorname{sh} n \pi \frac{d}{l} + [n \pi (\lambda_0 + \lambda_d) + n^3 \pi^3 (\mu_0 + \mu_d)] \operatorname{ch} n \pi \frac{d}{l}. \quad (78)$$

Подставляя (77) и (78) в (68), получаем искомое решение для $\psi(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x, y)}{\psi_l} - \frac{x}{l} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \pi} \left(\sin n \pi \frac{x}{l} \right) \frac{1}{C_n} \left[\lambda_d (\lambda_0 + \right. \\ & + n^2 \pi^2 \mu_0) \operatorname{sh} n \pi \frac{y}{l} + \lambda_0 (\lambda_d + n^2 \pi^2 \mu_d) \operatorname{sh} n \pi \frac{d-y}{l} + \\ & \left. + n \pi \lambda_d \operatorname{ch} n \pi \frac{y}{l} + n \pi \lambda_0 \operatorname{ch} n \pi \frac{d-y}{l} \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Подставляя в (79) $y=0$ и $y=l$, найдем функцию тока на электродах. Так, при $y=0$

$$\frac{\psi(x, 0)}{\psi_l} = \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \left(\sin n \pi \frac{x}{l} \right) \frac{1}{C_n} \left[n \pi \lambda_d + \right. \\ \left. + \lambda_0 (\lambda_d + n^2 \pi^2 \mu_d) \operatorname{sh} n \pi \frac{d}{l} + n \pi \lambda_0 \operatorname{ch} n \pi \frac{d}{l} \right]. \quad (80)$$

Если пренебречь поляризацией второго электрода, то при $y=0$ получим:

$$\frac{\psi(x, 0)}{\psi_l} = \frac{x}{l} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin n \pi \frac{x}{l} \right) \times \\ \times \frac{1}{n \pi + \frac{\mu_0 n^3 \pi^3}{\lambda_0} + \frac{n^2 \pi^2}{\lambda_0} \operatorname{th} n \pi \frac{d}{l}}. \quad (81)$$

Аналогичные формулы получаются для второго электрода.

Для определения плотности тока в любой точке электрода находим производную $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ при $y=0$ из (80):

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x} = \frac{\psi_l}{l} + \psi_l \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \left(\cos n \pi \frac{x}{l} \right) \frac{1}{C_n} \left[n \pi \lambda_d + \right. \\ \left. + \lambda_0 (\lambda_d + n^2 \pi^2 \mu_d) \operatorname{sh} n \pi \frac{d}{l} + n \pi \lambda_0 \operatorname{ch} n \pi \frac{d}{l} \right]. \quad (82)$$

КОМБИНАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОДОВ

В электрометаллургии, в электролизе водных растворов без выделения металлов и в гальваностегии приходится иметь дело с полями цилиндрических электродов или различных комбинаций цилиндрических электродов с плоскими.

Исследованию указанных полей необходимо предпослать рассмотрение полей линейных электродов. К тому же поле линейных электродов представляет и самостоятельный интерес, в частности в связи с цинкованием и лужением проволоки.

1. ПОЛЕ ПАРАЛЛЕЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

Рассмотрим поле двух параллельно расположенных линейных электродов, пренебрегая падением потенциала в их теле (рис. 40).

Применяя метод суперпозиции, найдем потенциал в точке поля $M(x, y)$:

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi l} \ln r_1 - \frac{I\rho}{2\pi l} \ln r_2 + C_1, \quad (1)$$

где

I — ток, протекающий через всю систему;

l — длина линейного проводника;

r_1 и r_2 — расстояния от электродов до точки M ;

$\frac{I\rho}{2\pi l} \ln r_1$ и $\frac{I\rho}{2\pi l} \ln r_2$ — потенциальные функции уединенных проводов.

Положив $c_1 = 0$, получим $\varphi = 0$ для оси симметрии (при $r_1 = r_2$), в которой совмещаем ось ординат. Соответственно уравнение эквипотенциальной линии примет такой вид:

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{I\rho}{2\pi l} \ln \frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} = \text{const}, \quad (2)$$

что возможно только при

$$\frac{(b-x)^2 + y^2}{(b+x)^2 + y^2} = k = \text{const}. \quad (3)$$

Уравнение (3) можно преобразовать:

$$(1 - k^2)x^2 - 2(1 + k^2)bx + (1 - k^2)y^2 = -b^2(1 - k^2). \quad (4)$$

Разделив (4) на $(1 - k^2)$ и добавив к обеим частям уравнения $\frac{1+k^2}{1-k^2}b^2$ приведем уравнение эквипотенциальных линий к виду

$$\left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kb}{1-k^2}\right)^2. \quad (5)$$

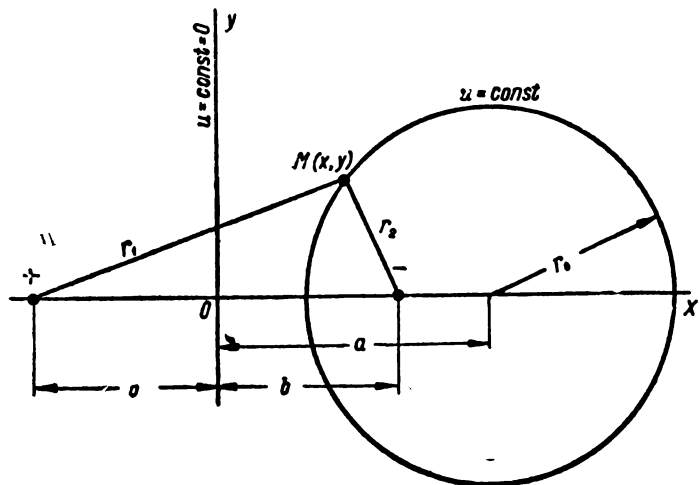


Рис. 40

Уравнение (5) является уравнением окружности с координатами центра $y_0 = 0$, $x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b$ и радиусом $r = \frac{2kb}{1-k^2}$.

Можно показать, что силовые линии также представляют собой окружности, центры которых расположены на оси $x = 0$. Уравнение силовых линий

$$x^2 + (y - y_c)^2 = r_c^2, \quad (6)$$

где r_c — радиус окружности;

y_c — координата центра окружности.

2. ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО И ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОДОВ

Для решения задачи воспользуемся методом зеркальных изображений. Построим фиктивное поле (см. рис. 40) таким образом, чтобы оно было зеркальным изображением действительного поля по другую сторону плоского электрода. Тогда поверхность анода будет поверхностью равного потенциала, что отвечает действи-

тельными условиям. Таким образом расчет искомого поля сводится к расчету поля двух линейных электродов с противоположными зарядами.

Для решения задачи о распределении тока на плоском электроде, используя (2), найдем плотность тока

$$i = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_{x=0}} = \frac{I}{4\pi l} \left| \frac{2(x+b)}{(x+b)^2 + y^2} - \frac{2(x-b)}{(x-b)^2 + y^2} \right|_{x=0} = \frac{Ib}{\pi l r^2}, \quad (7)$$

где r — расстояние точки на плоскости от линейного электрода.

Расчет аналогичного поля с учетом поляризации был выполнен Каспером [23]. При этом Каспер предположил линейную зависимость потенциала от плотности тока

$$\varphi_n = h \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n}. \quad (8)$$

Для случая $\varphi = \text{const}$ на электроде потенциал равен

$$\varphi = \frac{I \rho}{4\pi l} \ln \frac{(x-b)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2}. \quad (9)$$

Добавочная величина потенциала, вызванная поляризацией, может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$\varphi_n = \frac{I \rho}{4\pi l} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} f(\lambda) \cos \alpha(\lambda - y) d\lambda. \quad (10)$$

или в симметричной форме:

$$\varphi_n = \frac{I \rho}{4\pi l} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda, \quad (11)$$

где α — переменная интегрирования.

Суммарный потенциал в некоторой точке поля равен

$$u = \varphi + \varphi_n = \frac{I \rho}{4\pi l} \left\{ \ln \frac{(x-b)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda \right\}. \quad (12)$$

Так как на границе плоского электрода $x = 0$ значение потенциала φ принято равным нулю, то соответственно потенциал

$$u_{x=0} = \varphi_{n_{x=0}} = \frac{I \rho}{4\pi l} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda. \quad (13)$$

Дифференцируя (1), найдем плотность тока

$$i_{x=0} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \frac{I}{4\pi l} \left(-\frac{4b}{y^2 + b^2} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda \right). \quad (14)$$

Потенциал на границе плоского электрода

$$\varphi_{n_{x=0}} = \frac{h}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_{x=0}} \quad \text{или} \quad \varphi_n - h i_{x=0} = 0. \quad (15)$$

Задача может быть решена путем сопоставления (12), (14) (15).

$$\frac{I\rho}{4\pi} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda \right] =$$

$$= \frac{Ih}{4\pi} \left[-\frac{8b}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda^2 + b^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda \right], \quad (16)$$

где

$$\frac{4b}{y^2 + b^2} = \frac{8b}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda^2 + b^2}.$$

При перегруппировке членов найдем, что

$$\int_0^\infty \cos \alpha y d\alpha \int_0^\infty \left[f(\lambda) \left(1 + \frac{bh}{\rho} \right) + \frac{4bh}{\rho(\lambda^2 + b^2)} \right] \cos \alpha \lambda d\lambda = 0. \quad (17)$$

Так как левая часть уравнения (17) должна быть равна нулю при любом значении y , то отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \left[f(\lambda) \left(1 + b \frac{h}{\rho} \right) + \frac{4bh}{\rho(\lambda^2 + a^2)} \right] \cos \alpha \lambda d\lambda = 0,$$

следовательно,

$$\int_0^\infty f(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda = - \frac{4bh}{\rho \left(1 + \alpha \frac{h}{\rho} \right)} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda^2 + b^2} =$$

$$= -\frac{4bh}{\rho \left(1 + \alpha \frac{h}{\rho}\right)} \cdot \frac{\pi}{2b} e^{-\alpha b} = -\frac{2\pi h e^{-\alpha b}}{\rho \left(1 + \alpha \frac{h}{\rho}\right)}. \quad (18)$$

$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda^2 + b^2}$ вычисляется с помощью дифференцирования по параметру α .

Отсюда получаем значение u :

$$u = \frac{I\rho}{4\pi} \left[\ln \frac{(x-b)^2 + y^2}{(x+b)^2 + y^2} - \frac{4h}{\rho} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(b+x)} \cos \alpha y d\alpha}{1 + \alpha \frac{h}{\rho}} \right]. \quad (19)$$

Определим плотность тока на границе плоского электрода $x=0$, дифференцируя (19):

$$i_{x=0} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_{x=0}} = \frac{I}{4\pi} \left[\frac{4b}{y^2 + b^2} - \frac{4h}{\rho} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha b} \cos \alpha y d\alpha}{1 + \alpha \frac{h}{\rho}} \right]. \quad (20)$$

3. ПОЛЕ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРОДА, РАСПОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Пусть линейный электрод расположен между двумя плоскими параллельными электродами на равном расстоянии от них (рис. 41).

Для решения задачи [23] воспользуемся методом зеркальных изображений. Потенциал линейного электрода положим равным φ_0 , а потенциал плоских электродов — равным нулю. Это условие будет выполнено, если оба плоских электрода будут служить плоскостями симметрии. Для этого необходимо от обеих поверхностей отразить не только реальный линейный электрод, но и все его отражения. В результате получается система из бесконечного ряда линейных электродов чередующихся знаков, для которой и должна быть решена задача поля.

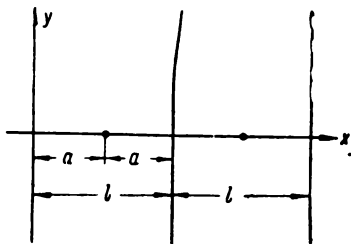


Рис. 41

Расположим исследуемое поле в плоскости комплексного переменного $z = x + jy$. Тогда потенциальная функция линейного электрода и одного из его соседних отражений будет равна:

$$\omega_1 = \frac{I\rho}{2\pi} \ln \left[\frac{(x-a) + jy}{(x+a) - jy} \right] = \frac{I\rho}{2\pi} \ln \frac{z-a}{z+a}. \quad (21)$$

Комплексный потенциал всех изображений получается при их суммировании. В результате получаем ряд

$$\omega = \frac{I \rho}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{z-a+2nl}{z+a+2nl}. \quad (22)$$

Положив для удобства

$$z-a = z' \text{ и } z+a = z'' \quad (23)$$

и выделив член со значением $n=0$, представим сумму логарифмов в виде логарифма произведения. При этом, поскольку каждому положительному значению n будет сопутствовать отрицательное значение n , получится бесконечное произведение

$$\omega = \frac{I \rho}{2\pi} \ln \frac{z'}{z''} + \frac{I \rho}{2\pi} \ln \prod_1^{\infty} \frac{z'^2 - (2nl)^2}{z''^2 - (2nl)^2}. \quad (24)$$

Уравнение (24) можно привести к такому виду:

$$\omega = \frac{I \rho}{2\pi} \ln \left[\frac{z'}{z''} \prod_1^{\infty} \left\{ \frac{1 - \frac{z' \frac{\pi}{l}}{2n\pi}}{1 - \frac{z'' \frac{\pi}{l}}{2n\pi}} \right\} \right]. \quad (25)$$

Используя известное разложение функции $\sin \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \prod_1^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{2n\pi} \right)^2 \right]$, получим:

$$\omega = \frac{I \rho}{2\pi} \ln \left[\frac{\sin \frac{z' \pi}{2l}}{\sin \frac{z'' \pi}{2l}} \right] = \frac{I \rho}{2\pi} \ln \left[\frac{1 - \cos \frac{\pi}{l} (z-a)}{1 - \cos \frac{\pi}{l} (z+a)} \right]. \quad (26)$$

Используя гиперболические функции, найдем:

$$\omega = \frac{I \rho}{4\pi} \ln \left[\frac{1 - \cos \frac{\pi}{l} (x-a) \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y + j \sin \frac{\pi}{l} (x-a) \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} y}{1 - \cos \frac{\pi}{l} (x+a) \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y + j \sin \frac{\pi}{l} (x+a) \operatorname{sh} \frac{\pi}{l} y} \right]. \quad (27)$$

Так как действительная часть этой функции $Re \omega$ представляет собой потенциал u , то, отделяя действительную часть (27), получим:

$$u = \frac{I \rho}{4\pi} \ln \left[\frac{\cos \frac{\pi}{l} (x-a) - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y}{\cos \frac{\pi}{l} (x+a) - \operatorname{ch} \frac{\pi}{l} y} \right]. \quad (28)$$

Плотность тока на плоском электроде ($x = 0$) найдем, дифференцируя (28) по x :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_{x=0}} = \frac{I}{2l} \cdot \frac{\sin \frac{\pi a}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - \cos \frac{\pi a}{l}}. \quad (29)$$

4. ПОЛЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО И БЕСКОНЕЧНОГО ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОДОВ

Пусть уравнения поверхности цилиндра и анода соответственно

$$(x - a)^2 + y^2 = r_0^2 \text{ и } x = 0. \quad (30)$$

Положим, что потенциал цилиндра равен $\varphi = \varphi_0$ и плоского электрода $\varphi = 0$.

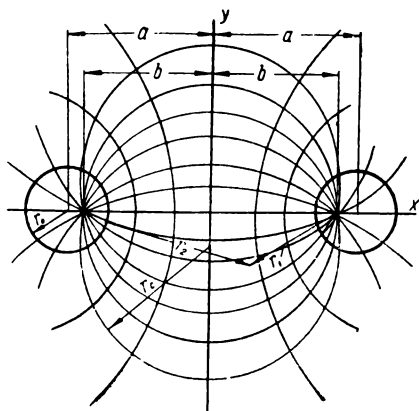


Рис. 42

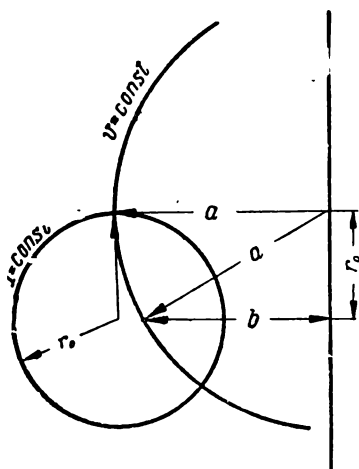


Рис. 43

Для решения воспользуемся методом зеркального изображения [40]. Тогда расчет поля сведется к расчету поля между двумя круговыми цилиндрами одинакового радиуса с потенциалами φ_0 и $-\varphi_0$.

Сечения рассматриваемых цилиндрических электродов конечные. При этом распределение тока на поверхности электродов не будет равномерным.

Для решения задачи совместим поверхность цилиндрических электродов с эквипотенциальными поверхностями поля двух линейных электродов, которые являются поверхностями круговых цилиндров. При этом удовлетворится основное условие — постоянство потенциала на поверхности электрода. В результате расчет

поля цилиндрических электродов сводится к определению положения эквивалентных им линейных электродов или, иначе, к отысканию положения электрических осей. Дальнейший расчет не отличается от расчета поля линейных электродов.

Пусть a — расстояние между геометрической осью электрода и плоским электродом (плоскостью нулевого потенциала) и b — расстояние от электрической оси до плоского электрода. Как видно из построения (рис. 43), треугольник abr_0 прямоугольный и, следовательно,

$$b = \sqrt{a^2 - r_0^2}. \quad (31)$$

Потенциал любой точки исследуемого поля можно вычислить по формуле:

$$\varphi = \frac{I \rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (32)$$

Для расчета напряженности поля удобнее перейти к цилиндрическим координатам, совмещая ось z с геометрической осью цилиндра. Напряженность поля на поверхности цилиндра будет иметь только одну радиальную составляющую

$$\begin{aligned} |E| = |Er| &= \frac{I \rho}{2\pi l} \cdot \frac{2b}{r_1 r_2} = \frac{I \rho}{2\pi l} \frac{2b}{\sqrt{(b-x)^2 + y^2} \sqrt{(b+x)^2 + y^2}} = \\ &= \frac{I \rho}{2\pi l} \cdot \frac{b}{x_i r_0}. \end{aligned} \quad (33)$$

Соответственно определим плотность тока

$$i = \frac{E}{\rho} = \frac{I}{2\pi l} \frac{\sqrt{a^2 - r_0^2}}{x_i r_0}. \quad (34)$$

Найдем сопротивление электролита.

Разность потенциалов между исследуемым цилиндром и его изображением

$$u = \varphi_0 - (-\varphi_0) = \frac{I \rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{I \rho}{2\pi l} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{I \rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (35)$$

Сопротивление электролита между цилиндрами

$$R_1 = \frac{u}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (36)$$

После преобразований получим

$$R_1 = \frac{\rho}{\pi l} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r_0^2}}{r_0}. \quad (37)$$

Очевидно, что сопротивление электролита между цилиндром и плоским электродом R будет равно половине R_1 :

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r_0^2}}{r_0}. \quad (38)$$

Для расчета распределения тока с учетом поляризации составляем эквивалентную схему, в которой силовые трубки представлены в виде системы параллельно соединенных проводников (см. рис. 15).

Определив из (34) плотность тока i_{ip} на участке катода ds с координатами x_i , y_i , рассчитаем ток на указанном участке:

$$dI_i = i_{ip} ds = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - r_0^2}}{x_i r_0} ds. \quad (39)$$

Проводимость dG_i трубки, через которую проходит ток, определим из соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi_0 = IR &= I \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r_0^2}}{r_0} = \frac{dI_i}{dG_i} = \\ &= \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - r_0^2}}{x_i r_0} \cdot \frac{ds}{dG_i}. \end{aligned} \quad (40)$$

Из (40) определяем dG_i :

$$dG_i = \frac{l \sqrt{a^2 - r_0^2}}{\rho x_i r_0 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r_0^2}}{r_0}}. \quad (41)$$

Если пренебречь поляризацией плоского электрода, то можно записать:

$$i_{\min} l \frac{ds}{dG_0} = i_i l \frac{ds}{dG_i} + f(i_i), \quad (42)$$

где $f(i_i) = \Delta \varphi_{ki}$ — приращение потенциала катода на участке x_i , y_i относительно потенциала φ_k участка, на котором плотность тока минимальная;

i_i — плотность тока на участке x_i , y_i ;

i_{\min} — минимальная плотность тока;

dG_0 и dG_i — проводимости трубок, опирающихся на участки с плотностью тока i_{\min} и i_i .

При линейной зависимости потенциала от плотности тока $\varphi_k = m + hl$ плотность тока определяется легко по уравнению:

$$i_i = \frac{i_{\text{мпп}} \left(l \frac{ds}{dG_0} - h_0 \right)}{l \frac{ds}{dG_0} + h} \quad (4)$$

В остальных случаях плотность тока может быть найдена и (42) графически.

Если нельзя пренебречь поляризацией второго электрода, то задача усложняется и уравнение (42) принимает вид:

$$\varphi_0 = f(i_i) + \psi(i_{a_i}) + i_i l \frac{ds}{dG_i} \quad (44)$$

Для определения i_{a_i} необходимо вычислить плотность тока в точке плоского электрода, в которую входит силовая линия, выходящая из точки (x_i, y_i) цилиндрического электрода.

Силовые линии, выходящие из любой точки окружности, проходят через электрическую ось и представляют собой окружности, центры которых расположены на оси $x = 0$. Уравнение силовых линий

$$x^2 + (y - y_c)^2 = r_c^2, \quad (45)$$

Найдем связь между координатой y_c центра окружности и радиусом этой окружности r_c . Поскольку силовая линия проходит через электрическую ось $x = b, y = 0$, ее уравнение может быть записано в виде:

$$a^2 - r_0^2 + y_c^2 = r_c^2. \quad (46)$$

Уравнение силовой линии, проходящей через заданную точку x'_i, y'_i , будет иметь вид:

$$x_c^2 + (y_i - y_c)^2 = y_c^2 - r_0^2 + a^2. \quad (47)$$

Отсюда найдем координату центра окружности (силовой линии):

$$y_c = \frac{x_i^2 + y_i^2 + r_0^2 - a^2}{2y_i}, \quad (48)$$

$$y_{a_i} = y_c + r_c. \quad (49)$$

Плотность тока i_{a_i} в точке y'_{a_i} определим, используя (7):

$$i_{a_i} = \frac{I}{\pi l} \cdot \frac{b}{b^2 + y_{a_i}'^2}.$$

Находим отношение

$$\frac{i_{a_i}}{i_i} = t = \frac{\frac{I}{\pi l} \cdot \frac{b}{b^2 + y_i'^2}}{\frac{I}{2\pi l} \cdot \frac{b}{x_i r_0}} = \frac{2x_i r_0}{b^2 + y_i'^2}. \quad (50)$$

Уравнение (44), которое можно соответственно записать в виде

$$\varphi_0 = f(i_i) + \psi(t_i) + i_i l \frac{ds}{dG_i}, \quad (44a)$$

решается графически.

Изменение плоскостей тока под влиянием поляризации при заданной минимальной плотности тока приведет к изменению суммарной силы тока. Действительное значение тока I_d можно найти, разбив поверхность цилиндрического электрода на n равных частей (где n — четное число) и находя в каждой значение плотности тока. Затем по формуле Симпсона определяют ток как сумму произведений средней плотности тока на каждом участке на величину поверхности участка

$$I_d = \frac{2\pi r_0 l}{3n} (i_0 + 4i_1 + 2i_2 + 4i_3 \dots + + 2i_{n-2} + 4i_{n-1} + i_n). \quad (51)$$

Падение напряжения в электролите с учетом поляризации может быть определено без всяких затруднений. Для этого достаточно подсчитать падение напряжения в любой силовой трубке:

$$u = f_1(i_i) + \psi_1(t_i) + i_i l \frac{ds}{dG_i}, \quad (52)$$

где $f_1(i_i)$ и $\psi_1(t_i)$ — потенциалы катода и анода (включая равновесные значения).

5. ЭЛЕКТРОДЫ — КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР И ДВЕ ПЛАСТИНЫ, РАСПОЛОЖЕННЫЕ У СТЕНОК ПРЯМОУГОЛЬНОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА

Случай, когда электрод, имеющий форму кругового цилиндра, помещен в прямоугольный электролизер на равном расстоянии от двух плоских параллельных электродов противоположной полярности, часто встречается в практике.

Для нахождения распределения тока на цилиндрическом катоде допустим, что весь заряд сосредоточен в центральной части (по оси) кругового цилиндра. Такое допущение можно сделать только в том случае, если поверхность исследуемого цилиндра будет совпадать с поверхностью равного потенциала.

По данным Каспера [23] круговая форма эквипотенциальных линий в поле линейного электрода, расположенных между плоскими электродами в прямоугольном электролизере, практически сохраняется, если радиус эквипотенциальной линии $r < 0,15$ в и $r < 0,15$ а. Следовательно, при соотношениях $\frac{r_0}{b} \ll 0,15$ и $\frac{r_0}{a} < 0,15$ поле рассматриваемого цилиндра можно заменить полем линейного заряда.

Для решения задачи [52] воспользуемся методом зеркальных изображений. Потенциал цилиндрического электрода положим равным φ_0 , а потенциал плоских электродов — равным нулю. Это условие будет выполнено, если оба плоских электрода будут служить плоскостями симметрии.

Как видно из рис. 44, электролит ограничен непроводящими

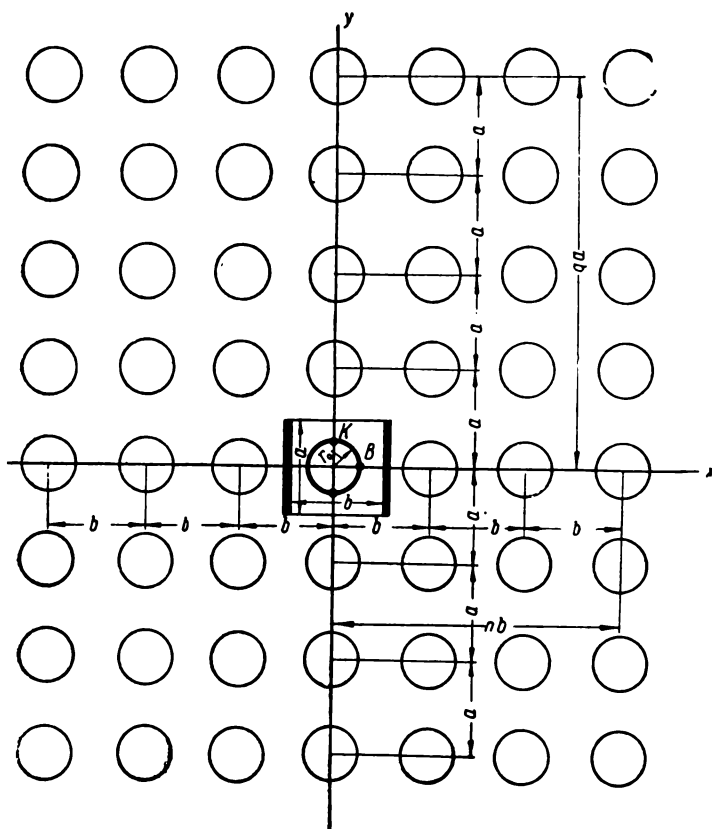


Рис. 44

стенками ванны (стенками электролизера). Составляющая напряженности, нормальная к поверхности непроводящих стенок равна нулю. Чтобы учесть влияние стенок, надо многократно отразить от них ток цилиндрического электрода. В результате получится бесконечная решетка с токами одинаковых знаков с шагом a . Каждое такое отражение надо многократно отразить от плоских электродов, в результате чего получается бесконечное количество решеток с чередующимися знаками с шагом b , отстоящих одна от другой на расстоянии a .

Решение указанной задачи охватывает не только случай еди-

нического цилиндрического катода, но и случай, когда любое количество цилиндрических (круговых) катодов расположено между анодными пластинками на расстоянии a один от другого.

Ограничим решение задачи определением плотности тока на наиболее нагруженной и наименее нагруженной частях цилиндрического электрода.

Составляющие напряженности по осям координат результирующего поля от любого числа линейных проводников равны алгебраическим суммам составляющих векторов напряженностей полей отдельных линейных проводников. Так как в точке K составляющая напряженности по оси x равна нулю, а в точке B равна нулю составляющая напряженности по оси y , то решение задачи упрощается. Оно сводится к определению сумм напряженностей, создаваемых исследуемым электродом, и всех его изображений: в точке B — по оси x и в точке K — по оси y . Выведенные формулы имеют такой вид:

$$E_K = \frac{\pi A}{2b} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi r}{2b} - \operatorname{th} \frac{\pi r_0}{2b} \right) - \frac{\pi A}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{e^{\frac{\pi na}{b}} + e^{-\frac{\pi na}{b}} + e^{\frac{\pi r_0}{b}} + e^{-\frac{\pi r_0}{b}}} + \frac{1}{e^{\frac{\pi na}{b}} + e^{-\frac{\pi na}{b}} - e^{\frac{\pi r_0}{b}} - e^{-\frac{\pi r_0}{b}}} \right]; \quad (54)$$

$$E_B = \frac{\pi A}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi r_0}{a} + \frac{2\pi A}{a} \left(e^{\frac{\pi r_0}{a}} - e^{-\frac{\pi r_0}{a}} \right) \times \\ \times \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\pi(2q-1)b}{a}} + e^{-\frac{\pi(2q-1)b}{a}} - e^{\frac{\pi r_0}{a}} - e^{-\frac{\pi r_0}{a}}} + \\ + \frac{2\pi A}{a} \left(e^{-\frac{\pi r_0}{a}} - e^{\frac{\pi r_0}{a}} \right) \times \\ \times \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{2\pi qb}{a}} + e^{-\frac{2\pi qb}{a}} - e^{\frac{\pi r_0}{a}} - e^{-\frac{\pi r_0}{a}}}, \quad (54)$$

где $A = \frac{I \rho}{2\pi l}$.

При $a \geq b$ всеми членами ряда, начиная со второго, можно пренебречь, допуская погрешность не более 1%.

Сопротивление электролита в рассматриваемом электролизере может быть рассчитано по выведенной Нетушилом формуле [53], которая позволяет рассчитать сопротивление электролита в прямоугольном электролизере между полуцилиндрическими электродами (рис. 45, а). Отсюда легко найти сопротивление рассматриваемого нами электролизера (см. рис. 45, в).

$$R = \frac{\rho}{4 \pi l} \left[\ln \left(\frac{a \operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}}{\pi r_0} \right) + \ln \left(\frac{\frac{2 \pi b}{e^{\frac{a}{r_0}}}}{\frac{2 \pi b}{e^{\frac{a}{r_0}}} - 1} \right) \right]. \quad (5)$$

Эта формула действительна только в случае, если $a \gg r_0$.

Как уже отмечалось ранее, формулы (53) и (54) действительны только при $\frac{r_0}{b} < 0,15 > \frac{r_0}{a}$. В то же время, например для практики электролитического осаждения металлов, важно получить

данные о распределении тока при большем сближении крупных цилиндров. Расстояние между осью покрываемых цилиндра и анодом в большинстве случаев превышает 5—10 и более раз радиус цилиндра. В то же время, когда это расстояние превышает в раз радиус цилиндра, различие между плотностями тока на поверхности цилиндра не превышает 5%. Поэтому для оценки возможности максимального сближения покрываемых круговых цилиндров можно без большой погрешности воспользоваться решением задачи, предложенным Смайтом [38] для решетки одноименно заряженных круговых цилиндров с потенциалом

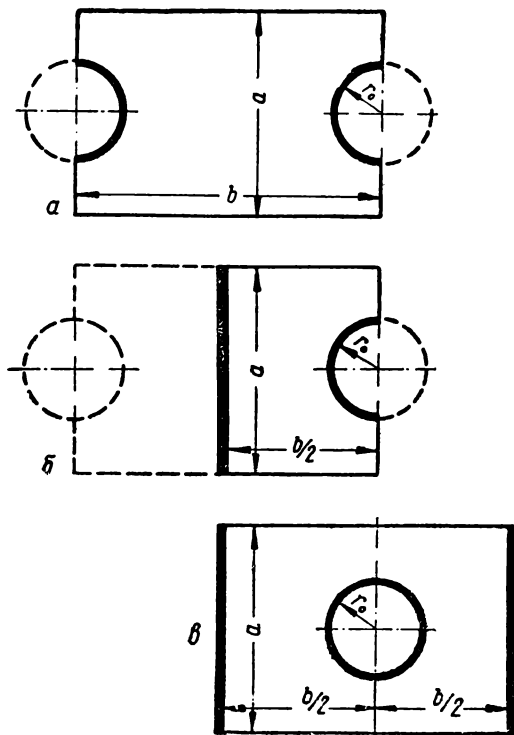


Рис. 45

φ_0 , удаленных на бесконечное расстояние от анодов.

Из соображений симметрии достаточно рассмотреть область представленную на рис. 46. Отобразим на верхнюю полуплос-

кость многоугольник $A_1A_2A_3A_4$, воспользовавшись формулой преобразования Кристоффеля — Шварца. Выбираем соответствующие так, что три вершины многоугольника A_1 , A_2 и A_4 будут являться соответственно образами точек $a_1 = +1$, $a_2 = -1$ и $a_4 = \infty$. Абсцисса четвертой точки $a_3 = a_m$ вещественной оси плоскости z_1 , преобразующейся в точку A_3 плоскости z , должна быть определена. При этом должно быть соблюдено неравенство $-1 > a_1 > -\infty$.

В нашем случае необходимо заменить острые углы (точки A_1 и A_2) в преобразовании Шварца на закругленные. Это может быть достигнуто путем замены множите-

$$\text{ля } z \left(\frac{a}{\pi} \right)^{-1} \text{ на } (z_1 + 1)^{\frac{a}{\pi} - 1} + \lambda (z_1 - 1)^{\frac{a}{\pi} - 1}.$$

Применив указанную замену, получим:

$$\frac{dz}{dz_1} = C_1 \times \frac{\sqrt{z_1 + 1} + \lambda \sqrt{z_1 - 1}}{\sqrt{(z_1 - 1)(z_1 + 1)(z_1 + a_m)}}. \quad (56)$$

Как показал Ричмонд [38], преобразование (56) позволяет получать вполне удовлетворительные по точности результаты при $2r_0 < \frac{a}{2}$.

Значение константы C_1 , определенное Смайтом [38]:

$$C_1 = \frac{\frac{a}{2}}{\pi(1 + \lambda)}. \quad (57)$$

Интегрирование (56) приводит к выражению:

$$z = \frac{a}{\pi(1 + \lambda)} \left[\text{arth} \sqrt{\frac{z_1 - 1}{z_1 + a_m}} + \lambda \text{arth} \sqrt{\frac{z_1 + 1}{z_1 + a_m}} \right] + C_2. \quad (58)$$

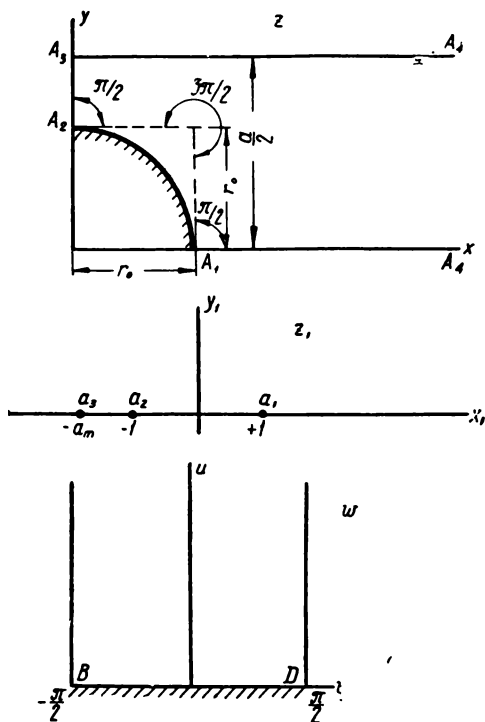


Рис. 46

Если сделать подстановку $z = r_0$, $z_1 = +1$ в (58), то оказывается, что C_2 является действительной величиной. Если сделать подстановку $z = jr_0$, $z_1 = -1$, то оказывается, что C_2 чисто мнимая величина. Следовательно, $C_2 = 0$. Как показал Смайт, указанные подстановки приводят к уравнениям:

$$\frac{a_m + 1}{2} = \operatorname{cth}^2 \left[\frac{\pi r_0 (1 + \lambda)}{a \lambda} \right]; \quad (59)$$

$$\frac{a_m - 1}{2} = \operatorname{ctg}^2 \left[\frac{\pi r_0 (1 + \lambda)}{a} \right]. \quad (60)$$

Из (59) и (60) получаем

$$\sin \frac{\pi r_0 (1 + \lambda)}{a} = \operatorname{th} \frac{\pi r_0 (1 + \lambda)}{a \lambda}. \quad (61)$$

Уравнение (61) решается относительно λ графически по заданным значениям a и r_0 . Из уравнения (60) получаем формулу для расчета постоянной a_m .

$$a_m = 2 \operatorname{ctg}^2 \left[\frac{\pi r_0 (1 + \lambda)}{a} \right] + 1. \quad (62)$$

Так как определение постоянной λ , а следовательно, и a_m связано с известными затруднениями, приводим построенный нами график зависимости λ и a_m от параметра $\frac{a}{2r_0}$ (рис. 47)

Далее используем уравнение

$$w = \arcsin z_1; \quad z_1 = \sin w \quad (63)$$

для отображения верхней полуплоскости на полубесконечную полосу (см. рис. 46) таким образом, что точки B и D будут являться соответственно образами точек a_2 и a_1 . При этом сохраняются начальные граничные условия в плоскости z и w .

В плоскости z

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } r = r_0; \quad (64)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } x > r_0, \quad y = 0; \quad (65)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } x > 0, \quad y = \frac{a}{2}; \quad (66)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad r_0 < y < \frac{a}{2}. \quad (67)$$

Соответственно в плоскости w

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}; \quad (68)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \text{ при } v = \pm \frac{\pi}{2}, u > 0. \quad (69)$$

Напряженность поля найдем из (62) и (63):

$$\frac{1}{E} = \left| \frac{dz}{dz_1} \cdot \frac{dz_1}{dw_1} \right| = \left| C_1 \frac{\sqrt{z_1+1} + \lambda \sqrt{z_1-1}}{\sqrt{(z_1-1)(z_1+1)(z_1+a_m)}} \sqrt{1-z_1^2} \right|. \quad (70)$$

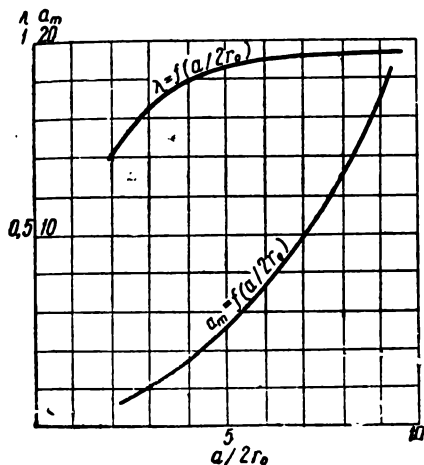


Рис. 47. Зависимость постоянных λ и a_m от $a/2r_0$

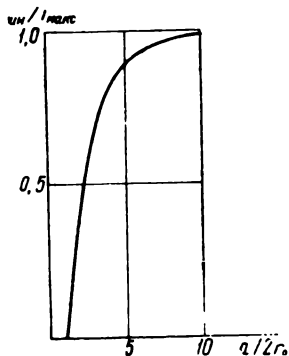


Рис. 48. Зависимость от отношения $\frac{i_{\min}}{i_{\max}}$ от параметра $a/2r_0$

Преобразуя (70), получим:

$$\frac{1}{E} = C_1 \left| \sqrt{-\frac{1+z_1}{a_m+z_1}} + \lambda \sqrt{\frac{1-z_1}{a_m+z_1}} \right|. \quad (71)$$

В общем случае, задаваясь значениями z_1 в пределах $-1 < z_1 < +1$, из уравнения (71) определяем напряженность, а из уравнения (58) — координаты точки, соответствующей найденному значению напряженности.

Значительно проще находится отношение $\frac{i_{\min}}{i_{\max}} = \frac{E_{\min}}{E_{\max}}$. Очевидно максимальная напряженность будет в точке A_1 , минимальная — в точке A_2 .

В точке A_1 $z = r_0$, соответственно $z_1 = +1$.

Из (71) найдем

$$\frac{1}{E_{\max}} = C_1 \left| \sqrt{-\frac{2}{a_m + 1}} \right|. \quad (72)$$

В точке A_2 $z = jr_0$, соответственно $z_1 = -1$ и

$$\frac{1}{E_{\min}} = C_1 \left| \lambda \sqrt{\frac{2}{a_m - 1}} \right|. \quad (73)$$

Разделив (72) на (73), получим:

$$\frac{E_{\min}}{E_{\max}} = \frac{i_{\min}}{i_{\max}} = \frac{1}{\lambda} \left| \sqrt{-\frac{a_m - 1}{a_m + 1}} \right| = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{a_m - 1}{a_m + 1}}. \quad (74)$$

Используя выведенную формулу (74) и кривые зависимости λ и a_m от параметра $\frac{a}{2r_0}$, мы рассчитали отношение $\frac{i_{\min}}{i_{\max}}$ для ряда значений параметра $\frac{a}{2r_0}$ в пределах от 2 до 10 и построили соответствующий график (рис. 48). График построен для значений $\frac{a}{2r_0}$ от 0 до 10. Для этого мы воспользовались тем, что при $\frac{a}{2r_0} = 1$ $\frac{i_{\min}}{i_{\max}} = 0$.

6. ПОЛЕ КОМБИНАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОДОВ

Если один из электродов, например катод, представляет собой круговой цилиндр с радиусом r_1 , размещенный внутри решетки из n цилиндрических анодов с радиусом r_2 , расположенных по образующей цилиндра с радиусом r_3 (рис. 49), то для расчета омического сопротивления ячейки можно воспользоваться формулой, выведенной Нетушилом:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left[\frac{n \sqrt[n]{r_3^{n+1}}}{r_1 \sqrt[n]{nr_2}} \right], \quad (75)$$

где ρ — удельное сопротивление;

l — высота цилиндров;

n — число анодов.

Эта формула действительна для случая, когда радиус r_3 намного превышает радиусы цилиндрических электродов r_1 и r_2 , т. е. $r_3 \gg r_1$ и $r_3 \gg r_2$.

Некоторый интерес для расчетов электролизеров может представить случай, изображенный на рис. 50, когда два цилиндра

дических электрода разной полярности размещаются в прямоугольном электролизере. Эту задачу можно решить, если рассмотреть систему эквивалентных решеток, полученных в результате многократного отражения электродов.

Сопротивление электролита в таком электролизере может быть рассчитано по формуле:

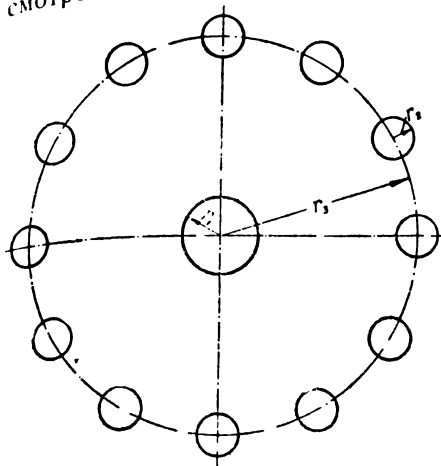


Рис. 49

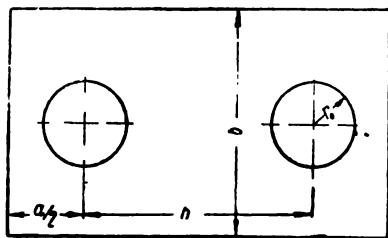


Рис. 50

$$R = \frac{\rho}{\pi l} \left\{ \ln \frac{h}{r_0} + \ln \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{h\pi}{b}}{\frac{h\pi}{b}} \right) + \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi a}{b}}} \right) \right\}. \quad (76)$$

Формула достаточно точна при $a \gg r_0$, $b \gg r_0$, $r_0 \ll h$ и $a + h \gg b$.

Эту формулу можно использовать также для расчета сопротивления ячейки, изображенной на рис. 51.

Рассматриваемая ячейка моделирует, например, электролизер Хюлина для производства металлического натрия. Этот электролизер представляет собой чугунный котел цилиндрической формы с коническим дном. Анод, изготовленный из никеля, представляет собой полый цилиндр. Внутри размещается металлическое кольцо, к которому приварены металлические стержни — катоды, параллельные образующей цилиндрического анода. Оси этих стержней располагаются на поверхности цилиндра, коаксиального по отношению к аноду.

Выделим элемент симметрии ABO . Очевидно, что сопротивление электролита в электролизере

$$R = \frac{R_1}{n}, \quad (77)$$

где R_1 — сопротивление выделенного элемента симметрии;
 n — число цилиндрических электродов.

из настылей, образующихся на трубе, через которую непрерывно протекает холодная вода. К такому типу электролизеров относится, например, ванна Тукера для рафинирования алюминия. Положим потенциал катода равным $-\varphi_0$ (A_5A_6), а анода $+\varphi_0$ (A_1A_2). Тогда потенциал линии симметрии A_3A_4 будет равен нулю. Очевидно, из соображений симметрии достаточно рассмотреть область $A_2A_1A_4A_3A_2$. Отобразим указанную область на верхнюю полуплоскость так, чтобы точки A_1 , A_2 и A_4 перешли

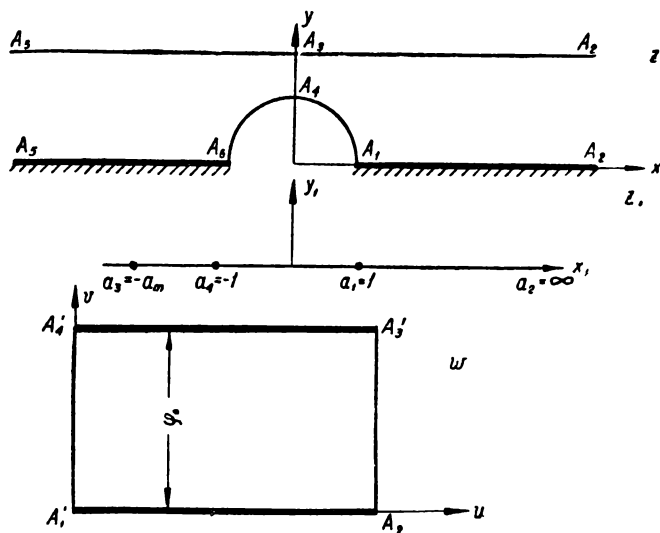


Рис. 52

соответственно в точки 1, ∞ и -1 на вещественной оси. Искомое отображение дается равенством (см. стр. 93).

$$\frac{dz}{dz_1} = C_1 \frac{\frac{1}{(z_1 + 1)^2} + \lambda \frac{1}{(z_1 - 1)^2}}{\sqrt{(z_1 + a_m)(z_1^2 - 1)}}, \quad (80)$$

где a_m — образ точки A_3 на верхней полуплоскости.

Постоянную C_1 определяют из уравнения $C_1 = \frac{a}{\pi(1+\lambda)}$. Постоянные λ и a_m определяются по рис. 47.

Далее отобразим верхнюю полуплоскость на внутренность прямоугольника с указанным на рис. 52 соответствием точек границ. Искомое отображение имеет вид:

$$w = C_3 \int_1^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1^2 - 1)(z_1 + a_m)}}. \quad (81)$$

При этом граничные условия в плоскости z сохраняются для плоскости w .

В плоскости z

$$\varphi = \varphi_0 \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ при } x > r_0, y = 0; \quad (82)$$

$$\varphi = 0 \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ при } x = 0, r_0 < y < \frac{a}{2}; \quad (83)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \text{ при } z = r_0 e^{j\varphi}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}; \quad (84)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } x > 0, y = \frac{a}{2}. \quad (85)$$

Соответственно в плоскости w

$$\varphi = 0; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{ на отрезке } A'_1 A'_2; \quad (86)$$

$$\varphi = \varphi_0; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{ на отрезке } A'_3 A'_4; \quad (87)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \text{ на отрезках } A_4 A_1 \text{ и } A_2 A_5. \quad (88)$$

Плоскость w можно рассматривать как плоскость комплексного потенциала. Тогда постоянную C_3 находят из условия:

$$\varphi_0 = C_3 \int_{-1}^{+1} \frac{dz_1}{V(z_1^2 - 1)(z_1 + a_m)}. \quad (89)$$

Для определения сопротивления электролита вычислим ток, проходящий через электролизер:

$$I = \frac{1}{\rho} \int_{A_3}^{A_4} E dz = \frac{C_3}{\rho} \int_{-a_m}^{-1} \frac{dz_1}{V(z_1 + a_m)(1 - z_1^2)}. \quad (90)$$

Подставив значение C_3 из (89), получим:

$$I = \frac{\varphi_0}{\rho} \cdot \frac{\int_{-a_m}^{-1} \frac{dz_1}{V(z_1 + a_m)(1 - z_1^2)}}{\int_{-1}^1 \frac{dz_1}{V(z_1 + a_m)(1 - z_1^2)}}. \quad (91)$$

Отсюда найдем сопротивление R_1 :

$$R_1 = \frac{\varphi_0}{I} = \rho \frac{\int_{-1}^{-a_m} \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1 + a_m)(1 - z_1^2)}}}{\int_{-1}^1 \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1 + a_m)(1 - z_1^2)}}}. \quad (92)$$

Очевидно, сопротивление рассматриваемого электролизера будет равно $R = 2R_1$.*

* Эта задача решена автором совместно с В. Цукерником.

Электрические поля алюминиевых электролизеров привлекали внимание исследователей и инженеров из-за большой значимости и удельного веса производства алюминия в электрохимической технологии и роли геометрических параметров электролизеров в технологии производства алюминия.

Для нормальной работы алюминиевых электролизеров имеет большое значение правильный выбор его геометрических параметров — междуэлектродного расстояния, расстояния между анодом и боковой стенкой, глубины погружения анода и высоты слоя электролита.

От правильности выбора расстояния между анодом и боковой стенкой зависит выход по току — один из важнейших технико-экономических показателей работы электролизера. Если это расстояние чрезмерно мало, то в этой зоне проходят токи большой силы и выделяется тепловая энергия в количестве, достаточном, чтобы препятствовать образованию гарниссажа. В этом случае на угольной боковой стенке электролизера будет разражаться алюминий и образовывать карбид. В результате ток, проходящий через боковую стенку, будет расходоваться бесполезно. Чрезмерно большие расстояния между боковой стенкой и анодом, увеличивая размеры электролизера, повышают тепловые потери и соответственно расход энергии.

Имеет существенное значение также количество электролита в электролизере. Увеличение этого количества и соответственно повышение уровня электролита обеспечивает более равномерный режим ванны. Увеличение количества электролита и, следовательно, его общей теплоемкости повышает тепловую инерцию системы, делая ее менее чувствительной к температурным изменениям. Менее резко изменяется концентрация глинозема как в процессе электролиза, так и в стадии загрузки. С другой стороны, повышение уровня электролита ухудшает условия образования гарниссажа на боковых стенках. Обычно глубина заполнения ванн электролитом колеблется от 15 до 45 см.

Большое значение при электролизе алюминия имеет правильный выбор междуэлектродного расстояния, от которого зависит удельный расход электроэнергии. При уменьшении расстояния между электродами, с одной стороны, снижается па-

дение напряжения в электролите и соответственно должен сокращаться расход энергии, а с другой, — снижается выход по току. Это связано, как известно, с растворением в электролите образовавшегося на катоде расплавленного металла и переносом его к аноду, где происходит его электрохимическое или химическое окисление. Естественно, чем меньше расстояние между электродами, тем с большей скоростью будут происходить перенос и окисление металла.

Как показал Абрамов [54], каждому значению выбранной плотности тока соответствует свое оптимальное междуэлектродное расстояние, при котором достигается минимальный удельный расход энергии.

Отметим также, что при чрезмерно малом расстоянии между электродами вследствие уменьшения сопротивления электролита в зоне, где проходит основная часть тока, уменьшится количество выделившегося тепла и в результате может произойти затверждение электролита. Правда, влияние это в большой степени зависит от высоты уровня металла в ванне и от плотности тока, от наличия настелей и т. д. В некоторых случаях уменьшение междуэлектродного расстояния при повышенном токе на ванне и малом количестве электролита приводит к перегреву ванны. Это объясняется тем, что с уменьшением междуэлектродного расстояния уменьшается выход по току и соответственно увеличивается приток тепла от окисления алюминия на аноде. Так как анод сгорает неравномерно по поверхности, то на отдельных выступающих его участках может произойти местный перегрев. Повышение температуры приведет к дальнейшему падению выхода по току в окружающих участках и в результате может распространиться на весь расплавленный электролит.

Обычно междуэлектродное расстояние, т. е. расстояние от горизонтальной поверхности анода до поверхности расплавленного алюминия, колеблется в пределах от 4,5 до 5,5 см.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА НА ЭЛЕКТРОДАХ

Для расчета поля алюминиевого электролизера достаточно рассмотреть элементы, ограниченные контурами $ABCD$ и $BDEF$ (рис. 53). Из указанных элементов складается поле алюминиевого электролизера, работающего с обожженными электродами. К полям подобного типа относятся поля электролизеров для рафинирования алюминия, для получения сплавов кальция с цинком и свинцом и др.

Рассмотрением этих элементов практически исчерпывается расчет электрических полей со-

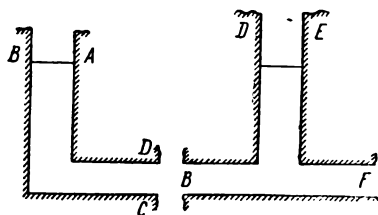


Рис. 53

временных алюминиевых электролизеров с самообжигающимися непрерывными анодами, когда в электролизере помещается только один такой анод.

Исследуем вначале элемент поля $BDEF$, изображенного на рис. 53, считая электроды неполяризующимися.

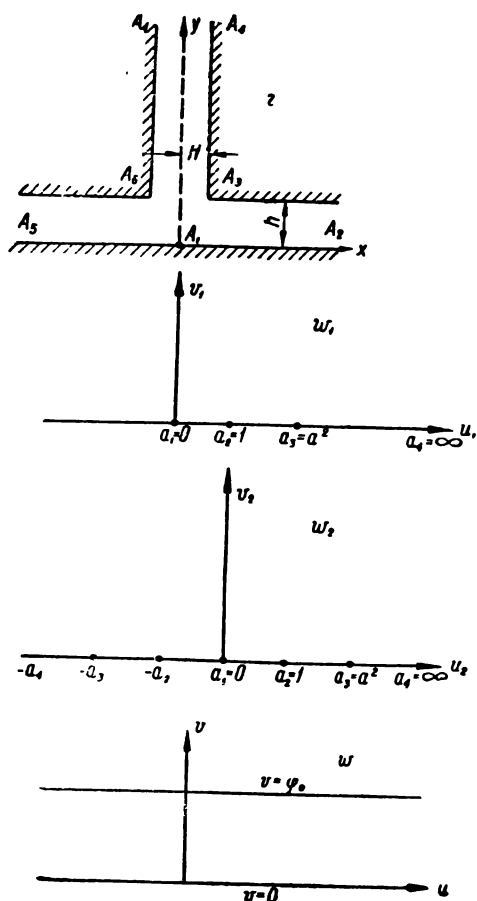


Рис. 54

Рассмотрим исследуемую область в плоскости комплексного переменного z . Проекции границ катода и анода в рассматриваемой плоскости комплексного переменного изображаются соответственно линиями A_5A_2 и $A_2A_3A_4A_6A_5$ (рис. 54).

Отобразим верхнюю полуплоскость на многоугольник $A_1A_2A_3A_4$, представляющий половину многоугольника $A_5A_2A_3A_4A_6A_5$.

Положим потенциал катода A_5A_2 равным φ_0 и потенциал анода $A_2A_3A_4A_6A_5$ равным нулю. Так как ось jy (A_1A_4) является линией симметрии, совпадающей с направлением силовых линий, то граничные условия могут быть записаны:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и } \varphi = 0 \text{ при } x = H, h \leq y < \infty; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ и } \varphi = 0 \text{ при } H < x < \infty, y = h; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ и } \varphi = \varphi_0 \text{ при } 0 < x < \infty, y = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, 0 < y < \infty. \quad (4)$$

Отметим, что ось симметрии A_1A_4 может быть заменена непроводящей стенкой при сохранении граничных условий (1) — (4). В этом случае указанная конфигурация моделирует алю-

мининовый электролизер с изолированной боковой стенкой (т. е. с гарниссажем).

При отображении выбираем соответствие так, чтобы три вершины A_1A_2 и A_4 являлись соответственно образами точек $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_4 = \infty$. Абсцисса точки $a_3 = a^2$, преобразующейся в точку A_3 , удовлетворяющая неравенству $1 < a^2 < \infty$, должна быть определена.

Углы при вершинах четырехугольника $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{3}{2}\pi$ и $\alpha_4 = 0$. Применив формулу Кристоффеля—Шварца получим преобразующую функцию

$$z = C \int_0^{w_1} w_1^{\frac{1}{2}-1} (w_1 - a^2)^{\frac{3}{2}-1} (w_1 - 1)^{0-1} dw_1 = \\ = C \int_0^{w_1} \sqrt{\frac{w_1 - a^2}{w_1}} \cdot \frac{dw_1}{w_1 - 1} \quad (5)$$

Определим значения постоянных C и a . Найдем приращение правой и левой частей уравнения (5) при обходе точки $w_1 = a_2 = 1$ по бесконечно большой полуокружности. Этому обходу будет соответствовать переход в бесконечности с участка A_1A_4 на участок анода A_4A_3 . При этом функция получит приращение $\Delta z = H$. С другой стороны, находим это приращение из (5):

$$\Delta z = \lim_{\rho \rightarrow \infty} C \int_{\rho} \sqrt{\frac{w_1 - a^2}{w_1}} \cdot \frac{dw_1}{w_1 - 1} \quad (6)$$

(где ρ — радиус окружности), откуда

$$H = -jC\pi; \quad C = \frac{jH}{\pi} \quad (7)$$

Обходу точки $w_1 = a_2 = 1$ по полуокружности бесконечно малого радиуса будет соответствовать переход в бесконечности с катода A_1A_2 на участок анода A_2A_3 . Функция при этом получает приращение $\Delta z = jh$. Из формул (5) и (7) получим:

$$\Delta z = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{jH}{\pi} \int_{\rho} \sqrt{\frac{w_1 - a^2}{w_1}} \cdot \frac{dw_1}{w_1 - 1} = \\ = H \sqrt{1 - a^2}; \quad (8)$$

$$jh = H \sqrt{1 - a^2}; \quad a^2 = \frac{H^2 + h^2}{H^2}; \quad \sqrt{a^2 - 1} = \frac{h}{H} \quad (9)$$

Введем замену переменной, положив $\frac{w_1 - a^2}{w_1} = \frac{1}{\xi^2}$, откуда

$$\omega_1 = \frac{a^2 \xi^2}{\xi^2 - 1}; \quad \omega_1 - 1 = \frac{(a^2 - 1) \xi^2 + 1}{\xi^2 - 1};$$

$$d\omega_1 = - \frac{2a^2 \xi}{(\xi^2 - 1)^2} d\xi.$$

Тогда пределы интегрирования $(0, \omega_1)$ соответственно переходят в $\left(0, \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}}\right)$ и интеграл (5) примет вид:

$$z = \frac{2jH}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}}} \frac{a^2}{(1 - \xi^2) [(a^2 - 1) \xi^2 + 1]} d\xi. \quad (10)$$

Очевидно,

$$a^2 = (a^2 - 1)(1 - \xi^2) + (a^2 - 1)\xi^2 + 1. \quad (11)$$

После подстановки (11) в (10)

$$z = \frac{2jH}{\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}}} \left[\frac{a^2 - 1}{(a^2 - 1)\xi^2 + 1} + \frac{1}{1 - \xi^2} \right] d\xi; \quad (12)$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}}} \frac{a^2 - 1}{(a^2 - 1)\xi^2 + 1} d\xi = \frac{h}{H} \operatorname{arctg} \frac{h}{H} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}}; \quad (13)$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}}} \frac{d\xi}{1 - \xi^2} = \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}}. \quad (14)$$

Поэтому

$$z = \frac{2j}{\pi} \left(h \operatorname{arctg} \frac{h}{H} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}} + H \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_1 - a^2}} \right). \quad (15)$$

Заменяя в (15) $\omega_1 = \omega_2^2$, получим функцию, отображающую полуплоскость ω_2 на всю область плоскости z [37]:

$$z = \frac{2j}{\pi} \left(h \operatorname{arctg} \frac{h}{H} \cdot \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 - a^2}} + H \operatorname{arth} \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 - a^2}} \right). \quad (16)$$

Далее преобразуем поле верхней полуплоскости ω_2 в однородное поле плоскости $\omega = u + jv$ так, чтобы отрезки $a_2 a_4$ и

$a_1 a_2$ ($1 < \omega_2 < \infty$; $-1 > \omega_2 > -\infty$) перешли в действительную ось плоскости $\text{Im } \omega = 0$ и участок $-a_2 a_2$ ($-1 < \omega_2 < 1$) в прямую $\text{Im } \omega = \varphi_0$. Указанное преобразование имеет вид:

$$\omega = \frac{\varphi_0}{\pi} \ln \frac{\omega_2 - 1}{\omega_2 + 1}. \quad (17)$$

Напряженность $E = \left| \frac{dw}{dz} \right|$; следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} &= \left| \frac{dz}{dw} \right| = \left| \frac{dz}{d\omega_1} \cdot \frac{d\omega_1}{d\omega_2} \cdot \frac{d\omega_2}{d\omega} \right| = \\ &= \frac{H}{\varphi_0} \left| \sqrt{\frac{\omega_1 - a^2}{\omega_1}} \cdot \frac{2\sqrt{\omega_1}}{\omega_1 - 1} \cdot \frac{\omega_2 - 1}{\omega_2 + 1} \cdot \frac{(\omega_2 + 1)^2}{2} \right|; \end{aligned} \quad (18)$$

$$E = \frac{\varphi_0}{H} \frac{1}{\left| \sqrt{\omega_2^2 - a^2} \right|}. \quad (19)$$

В бесконечности на поверхности анода, параллельной катоду, поле однородно и, следовательно, напряженность E будет равна

$$E_0 = \frac{\varphi_0}{h}. \quad (20)$$

Найдем связь между напряженностью E и соответствующими точками анода.

1. На участке $A_3 A_2$ анода $z = x + jh$; $H < x < \infty$;

$$1 < \omega_2 < a; \quad \frac{\varphi_0}{h} \leq E < \infty, \quad \sqrt{\omega_2^2 - a^2} = j \frac{\varphi_0}{HE}; \quad (21)$$

$$a^2 - \omega^2 = \frac{\varphi_0^2}{H^2 E^2}; \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{E^2 (H^2 + h^2) - \varphi_0^2}}{HE}. \quad (22)$$

Положим

$$\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 - a^2}} = -j \frac{\sqrt{E^2 (H^2 + h^2) - \varphi_0^2}}{\varphi_0} = -jp. \quad (23)$$

Тогда (16) примет вид

$$x + jh = \frac{2j}{\pi} \left[h \arctg \left(-j \frac{h}{H} p \right) + H \operatorname{arth} (-jp) \right]. \quad (24)$$

Преобразуя (24), получим:

$$x = \frac{h}{\pi} \ln \frac{\frac{h}{H} p + 1}{\frac{h}{H} p - 1} + \frac{2H}{\pi} \arctg p. \quad (25)$$

2. На участке $A_3 A_4$ анода $z = H + jy$; $h < y < \infty$;

$$a \leq \omega_2 < \infty; \quad 0 \leq E < \infty; \quad \sqrt{\omega_2^2 - a^2} = \frac{\varphi_0}{HE}. \quad (26)$$

Из (26) и (9) получим:

$$\omega^2 = \frac{\varphi_0^2}{H^2 E^2} + \frac{H^2 + h^2}{H^2}; \quad \omega_2 = \frac{1}{HE} \sqrt{E^2 (H^2 + h^2) + \varphi_0^2}. \quad (27)$$

Положим

$$\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 - a^2}} = \frac{1}{\varphi_0} \sqrt{E^2 (H^2 + h^2) + \varphi_0^2} = q. \quad (28)$$

Тогда (16) примет вид:

$$H + jy = \frac{2j}{\pi} \left(h \operatorname{arctg} \frac{h}{H} q + H \operatorname{arth} q \right). \quad (29)$$

После преобразований получим значение y :

$$y = \frac{2h}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h}{H} q + \frac{H}{\pi} \ln \frac{q+1}{q-1}. \quad (30)$$

3. На катоде $z = x$; $-\infty < x < \infty$. Этому интервалу соответствует интервал $-1 < u_2 < 1$ вещественной оси на плоскости ω_2 . В этом случае

$$E = j \frac{\varphi_0}{H} \frac{1}{\sqrt{\omega_2^2 - a^2}}, \quad (31)$$

откуда

$$\frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_2^2 - a^2}} = -j \frac{\sqrt{E^2 (H^2 + h^2) - \varphi_0^2}}{\varphi_0}. \quad (32)$$

Подставляя выражение (31) в (16), получим:

$$x = \frac{2}{\pi} \left(h \operatorname{arth} \frac{h}{H} \frac{\sqrt{E^2 (H^2 + h^2) - \varphi_0^2}}{\varphi_0} + \right. \\ \left. + H \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{E^2 (H^2 + h^2) - \varphi_0^2}}{\varphi_0} \right). \quad (33)$$

Эта формула дает распределение напряженности поля на катоде.

Следует учесть, что выведенные формулы дают погрешность, если их применяют для расчета электродов конечных размеров.

Используя соотношение $i = \frac{E}{\rho}$ и полученные формулы (20)

и (24), определяем точки на аноде, соответствующие заданным плотностям тока, что позволяет построить графики распределения тока при заданном отношении $\frac{H}{h}$.

Далее определяем, при какой минимальной конечной длине участков $A_3A_2 = x_m$ и $A_3A_4 = y_m$ практически останется неизменным установленное нами распределение тока. Для этого найдем положение точки на участке A_3A_2 , в которой напряженность поля отличается на 1% (или на 2—3%, в зависимости от необходимой точности) от напряженности однородного поля E_0 . Затем находим положение точки на участке A_3A_4 , в которой напряженность поля составляет $\sim 1\%$ от E_0 . Координаты найденных точек и определяют искомые конечные размеры электродов. Наоборот, по заданным конечным размерам участков A_3A_2 и A_3A_4 можно определить отклонение от равномерного значения напряженности с тем, чтобы приближенно оценить погрешность.

Далее находим проводимость трубки электролита dG_0 , опирающейся на участок dS однородного поля:

$$dG_0 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{h}. \quad (34)$$

Определяем проводимость трубки электролита dG_i , опирающейся на такой же участок анода в любой другой точке:

$$\frac{i_0 ds}{dG_0} = \frac{id s}{dG_i}; \quad dG_i = dG_0 \frac{i_i}{i_0} = \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{E_i}{E_0} ds. \quad (35)$$

Составляем эквивалентную схему, используя приближенный метод, описанный в предыдущей главе, и находим скорректированные значения плотностей тока с учетом анодной поляризации (катодная поляризация настолько мала, что ею можно пренебречь).

Найти распределение тока с учетом поляризации можно, используя метод расчета электростатического поля в трансформаторах, предложенный Лабусом и развитый Аронзоном [55]. С этой целью находим распределение тока на аноде $A_5A_6A_4A_3A_2$ по формулам (20) и (24). Далее по данным кривой зависимости потенциала от плотности тока находим распределение потенциала на аноде. Полученную кривую изменения потенциала аппроксимируем прямой линией. В результате получаем линейную зависимость потенциала от длины анода. Начиная с некоторого расстояния от точек A_6 и A_3 в области малых плотностей тока, потенциал анода будет практически постоянным. Используя отображение заданного контура на верхнюю полуплоскость, находим указанные расстояния и затем определяем потенциал в любой точке с помощью интеграла Пуассона:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t) y}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad (36)$$

где $u(x, y)$ — значения потенциала в точках верхней полуплоскости;

$u(t)$ — значения потенциала на действительной оси.

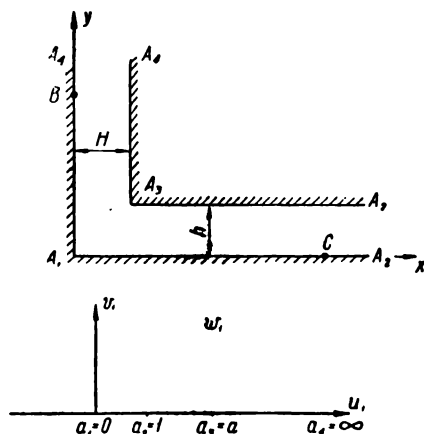


Рис. 55

Перейдем к рассмотрению элемента $ABCD$. Найдем распределение потенциала и поля между электродами для случая, изображенного на рис. 55. Участок границы $A_4A_1A_2$ является катодом, потенциал которого примем равным нулю, а участок $A_2A_3A_4$ — анодом, потенциал которого примем равным φ_0 . Отобразим верхнюю полуплоскость конформно на указанную область. Искомое отображение получается с помощью формулы Кристоффеля — Шварца.

$$z = C \int_0^{w_1} \sqrt{\frac{w_1 - a}{w_1}} \cdot \frac{dw_1}{w_1 - 1}, \quad (37)$$

где постоянные C и a подлежат определению.

Точкам $A_1A_2A_3A_4$ границы области на плоскости z соответствуют точки $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = a$, $a_4 = \infty$ вещественной оси на плоскости w_1 .

Для нахождения постоянных C и a найдем изменение функции z при обходе вокруг точки $w = 1$ по бесконечно малой и бесконечно большой полуокружностям. В результате получим:

$$C = \frac{jH}{\pi}; \quad a^2 = \frac{h^2 + H^2}{H^2}.$$

Интеграл, входящий в формулу (37), легко вычисляется в элементарных функциях с помощью подстановки $w_1 = \frac{1}{\xi}$.

Тогда из (37)

$$z = 2j \frac{H}{\pi} \left\{ \frac{h}{H} \operatorname{arctg} \frac{h}{H} \sqrt{\frac{w_1}{w_1 - a}} + \operatorname{arth} \sqrt{\frac{w_1}{w_1 - a}} \right\}. \quad (38)$$

Отообразим теперь верхнюю полуплоскость w_1 на полосу в плоскости комплексного потенциала w :

$$w = \frac{\varphi_0}{\pi} \ln(1 - w_1). \quad (39)$$

Мнимая часть w дает потенциал, который, как видно из (39), равен нулю при вещественных $w_1 < 1$ и равен φ_0 при $1 \leq w_1 < \infty$.

Величина напряженности электрического поля между электродами равна

$$E = \left| \frac{dw}{dz} \right|.$$

Из (38) и (39) находим

$$E = \frac{\varphi_0}{H} \left| \sqrt{\frac{w_1}{w_1 - a}} \right|. \quad (40)$$

В частности на электродах

$$E = \frac{\varphi_0}{H} \left| \sqrt{\frac{u_1}{u_1 - a}} \right|, \quad (41)$$

где $u_1 = Rew_1$ (u_1 означает вещественную часть).

На участке катода A_1A_2 $z = x$. Этому участку соответствует интервал $0 \leq u_1 \leq 1$. Для этого интервала, как видно из (41),

$$E = \frac{\varphi_0}{H} \sqrt{\frac{u_1}{a - u_1}} = j \frac{\varphi_0}{H} \sqrt{\frac{u_1}{u_1 - a}}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (38), получим:

$$x = 2 \frac{H}{\pi} \left\{ \frac{h}{H} \operatorname{arth} \frac{hE}{\varphi_0} + \operatorname{arctg} \frac{hE}{\varphi_0} \right\}. \quad (43)$$

На участке катода A_4A_1 $z = jy$, чему соответствует интервал $-\infty < u < 0$. В этом случае

$$E = \frac{\varphi_0}{H} \sqrt{\frac{u_1}{u_1 - a}}. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (38), получим:

$$y = 2 \frac{H}{\pi} \left\{ \frac{h}{H} \operatorname{arctg} \frac{hE}{\varphi_0} + \operatorname{arth} \frac{hE}{\varphi_0} \right\}. \quad (45)$$

Участок анода A_2A_3 , для которого $z = x + jh$ ($H \leq x < \infty$), соответствует участку $1 \leq u_1 \leq a$ на границе верхней полуплоскости w_1 . При этом

$$E = \frac{\varphi_0}{H} \sqrt{\frac{u_1}{a - u_1}} = j \frac{\varphi_0}{H} \sqrt{\frac{u_1}{u_1 - a}}. \quad (46)$$

Из (46) и (38) находим:

$$x + jh = 2 \frac{H}{\pi} \left\{ \frac{h}{H} \operatorname{arth} \frac{h}{\varphi_0} E + \operatorname{arctg} \frac{HE}{\varphi_0} \right\}, \quad (47)$$

или, так как $\frac{h}{\varphi_0} E > 1$ при $1 \ll u_1 \ll a$,

$$x = \frac{2H}{\pi} \left\{ \frac{h}{H} \operatorname{arth} \frac{\varphi_0}{hE} + \operatorname{arctg} \frac{HE}{\varphi_0} \right\}. \quad (48)$$

На участке A_3A_4 анода $z = H + jy$. Этому участку соответствует интервал (a, ∞) вещественной оси на плоскости w . При этом

$$E = \frac{\varphi_0}{H} \sqrt{\frac{u_1}{u_1 - a}}. \quad (49)$$

Тогда из (49) и (38) получаем:

$$y = \frac{2H}{\pi} \left\{ \frac{h}{H} \operatorname{arctg} \frac{h}{\varphi_0} E + \operatorname{arth} \frac{\varphi_0}{HE} \right\}. \quad (50)$$

Формулы (43), (45), (48) и (50) дают распределение напряженности на электродах. Из них видно, в частности, что при больших x и y поле однородно, а вблизи вершин A_1 и A_3 углов поле стремится соответственно к нулю и бесконечности.

Полученные аналитическим путем формулы (25), (30), (33), (43), (45), (48), (50) и предложенный способ учета поляризации позволяют выявить влияние геометрических параметров на распределение тока на электродах.

Используя экспериментальный метод, Машовец [57] с сотрудниками обстоятельно изучили распределение тока на электродах алюминиевого электролизера в зависимости от междуэлектродного расстояния, расстояния от анода до боковой стенки и глубины погружения анода. Исследование проводили на моделях, подобных элементам электролизера $ABCD$ и $BDEF$ (см. рис. 53), с применением медных пластинчатых электродов и медного серноокислого электролита.

В электролизере с неизолированной боковой стенкой (элемент $BDEF$) увеличение междуэлектродного расстояния (параметра h) приводит к более равномерному распределению тока на катоде; на участке катода, расположенном непосредственно под анодом, плотность тока убывает, а на боковой стенке возрастает.

Естественно, что это препятствует образованию гарниссажа у боковых стенок, так как возрастает общая выделяемая мощность из-за увеличения падения напряжения в электролите и повышается доля тока в зоне электролита, прилегающего к боковой стенке.

Количественно влияние параметра h на распределение тока между отдельными участками электродов характеризуется данными, приведенными в табл. 3, а также рис. 56 и 57.

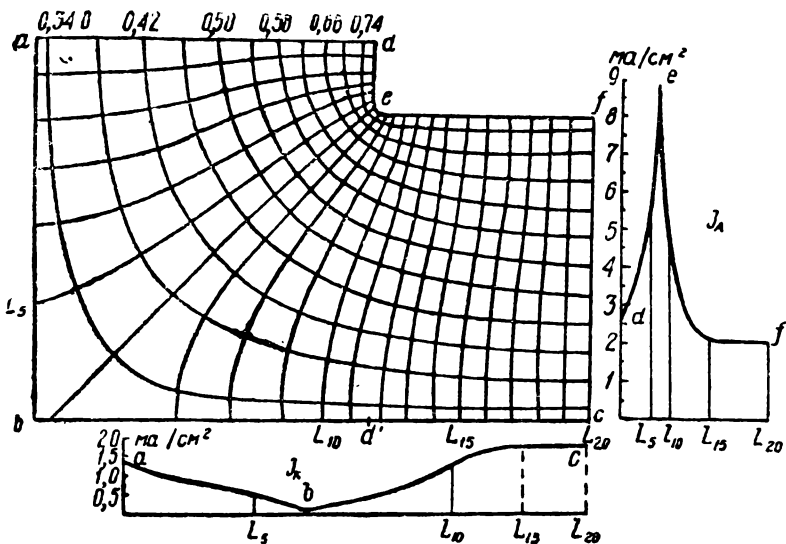


Рис. 56. Поле ячейки с непроводящей стенкой и кривые распределения тока:

$H = 18$ см; $l = 20$ см и $h = 2$ см (по В. П. Машовцу и др.)

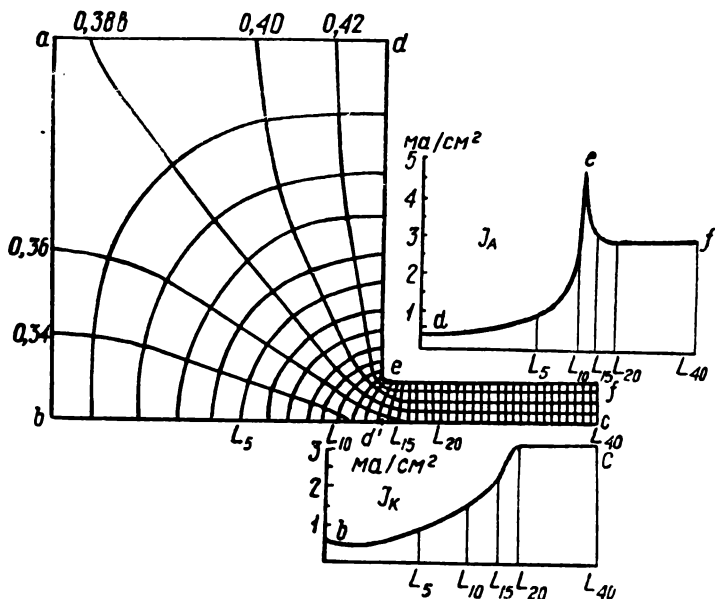


Рис. 57. Поле ячейки с непроводящей стенкой и кривые распределения тока:

$H = 18$ см; $l = 20$ см и $h = 16$ см (по В. П. Машовцу и др.)

Влияние междуэлектродного расстояния на распределение тока
в алюминисвом электролизере

$$H = 18 \text{ см}, b = 20 \text{ см}, i_{\text{ср}} = 1,0 \text{ ма/см}^2$$

(боковая стенка не изолирована)

h см	Распределение тока на катоде, %			Сопротивле- ние ячейки ом	Плотность тока в точках					
	I_{ab}	$I_{bd'}$	$I_{d'c}$		a	b	c	f	e	d
2	11,8	27,0	61,2	1,48	0,40	0,07	2,63	2,63	5,0	5,0
4	14,3	27,4	58,3	2,88	0,50	0,15	2,45	2,45	—	0,6
8	24,5	31,1	44,4	4,44	1,00	0,2	2,0	2,0	6,65	1,25
12	27,8	30,0	42,2	6,45	1,06	0,2	2,0	2,0	7,45	1,55
16	29,2	28,6	42,2	8,47	1,85	0,2	1,87	2,0	9,1	2,50
19	30,4	27,4	42,2	10,25	1,8	0,25	1,85	2,6	15,6	5,10

* По В. П. Машовцу и др.

На распределении тока существенно сказывается также расстояние между боковой стенкой и анодом. Увеличение этого расстояния приводит к уменьшению плотности тока на боковой стенке, особенно в ее нижней части. Соответственно возрастает доля тока, проходящего к катоду непосредственно под анодом. На участке катода bd' , (см. рис. 57), вне анода, ток увеличивается, но средняя плотность тока на этом участке уменьшается. Менее равномерно при этом распределяется ток и на аноде.

При постоянном расстоянии между катодом и анодом $h = 2 \text{ см}$ увеличение расстояния между боковой стенкой и анодом сказывается заметно только при отношении $\frac{H}{h} < 6$.

Дальнейшее увеличение расстояния H оказывает уже незначительное влияние.

Поскольку с увеличением H ток распределяется все менее равномерно, то соответственно менее равномерно распределяется и удельная мощность.

В ячейке с изолированной боковой стенкой увеличение расстояния H вызывает увеличение тока и уменьшение плотности тока на периферийном участке катода bd' (см. табл. 4) и соответственно уменьшение плотности тока в области равномерного поля.

С повышением уровня электролита (т. е. с увеличением l) увеличиваются поверхность как анода, так и катода, что приводит к снижению средней плотности тока. На катоде снижается плотность тока на участке $d'c$, расположенном под анодом;

Влияние расстояния между анодом и боковой стенкой
на распределение тока в алюминиевом электролизере

$$h = 2 \text{ см}, l = 14 \text{ см}, i_{\text{ср}} = 2,1 \text{ ма/см}^2$$

h см	Распределение тока на катоде, %			Сопротив- ление ячейки ом	Плотность тока в точках				
	I_{ab}	$I_{bd'}$	$I_{d'c}$		a	b	c и f	e	d

Ячейка с неизолированной стенкой

2	50,0	4,3	45,7	1,13	1,94	0,95	1,94	4,4	1,94
4	35,7	7,6	56,7	1,26	1,47	0,40	2,37	5,3	1,47
8	28,0	16,2	55,8	1,56	1,30	0,35	2,40	7,0	1,30
12	16,4	19,7	63,9	1,75	0,70	0,35	2,75	—	1,05
18	6,7	25,3	68,0	1,71	0,35	0,10	2,83	7,3	0,80
24	5,0	28,5	66,5	—	0,10	0,10	2,81	6,7	0,70
30	0,9	27,9	71,2	—	0,03	0,02	2,85	6,8	0,70

Ячейка с изолированной стенкой

12	—	26,3	73,7	1,67	—	0,95	3,11	7,3	0,35
18	—	31,3	68,7	1,65	—	0,60	2,86	7,15	0,55

* По В. П. Машовцу и др.

на других участках катода и особенно на боковой стенке плотность тока повышается.

Наряду с этим происходит также уменьшение выделяемой мощности за счет некоторого уменьшения общего сопротивления электролита и снижения поляризации, вызванного уменьшением плотности тока.

При изолированной боковой стенке с увеличением H уменьшается только средняя катодная плотность тока. Среднее значение анодной плотности тока остается неизменным. Происходит лишь перераспределение тока, приводящее к росту плотности на «периферическом» участке катода и к уменьшению плотности тока на участке катода, расположенном под анодом.

Необходимо указать, что выведенные нами формулы, а также результаты исследования поля алюминиевого электролизера даны для случая, когда можно пренебречь падением потенциала в электродах.

В действительности же, хотя удельное сопротивление материала анода заметно меньше удельного сопротивления электролита, тем не менее это соизмеримые величины.

В работах Коробова [59, 60] было показано, что нижняя поверхность анода (подошва) неэквипотенциальна. Это вызвано падением напряжения в теле анода. Разность потенциалов меж-

ду периферией и центральной частью нижней поверхности анода достигает 500 мв; она значительно меньше на узких анодах (до 1,7 м) и больше на широких (2,5 м).

Указанное различие потенциалов, естественно, приводит к появлению горизонтальной составляющей токов. Это оказывает влияние на распределение тока на электродах и в электролите и на взаимодействие токов с магнитными полями.

Так как конус спекания у торцов электрода ниже, а электропроводность обожженной части электрода выше, то центральная часть анода оказывается нагруженной больше. Это в сочетании с худшими условиями теплоотдачи приводит к перегреву электролита под центральной частью анода.

Уменьшения потерь напряжения в аноде и соответственно большей равномерности распределения тока можно достигнуть, увеличив длину контактных штырей и рационально выбрав их расположение. Так, при боковом подводе тока целесообразно увеличить число подключенных центральных штырей [60], что особенно важно для электролизеров с широким анодом. При верхнем подводе тока уменьшение падения напряжения может быть достигнуто увеличением размеров токоподводящих штырей.

Исследования, проведенные Коробовым [60], показали, что в расплавленном металле ток также не течет в строго вертикальном направлении. Проводимость слоя жидкого алюминия заметно больше проводимости шин, поэтому ток, идущий в горизонтальном направлении, как бы разветвляется — часть его течет по шине, другая часть — по расплавленному алюминию.

Ежедневные измерения тока, протекающего в катодных стержнях, показали, что, как правило, ток возрастает в направлении ввода токоподводящей шины. Неравномерность распределения тока тем больше, чем длиннее электролизер. Расчет показал, что плотность горизонтальной составляющей тока для электролизера с широким анодом близка к $0,2 \text{ а/см}^2$, для обычного электролизера $0,5 \text{ а/см}^2$ и для мощного электролизера $1,6 \text{ а/см}^2$.

Наряду с горизонтальной составляющей, направленной вдоль ванны, Влейгель [61] отмечал также наличие поперечной составляющей. Величина ее зависит от высоты слоя алюминия и величины междуэлектродного расстояния, так как определяется соотношением проводимости расплавленного металла и электролита. При толщине слоя металла 30 см поперечная составляющая равна (по данным Коробова) $0,3 \text{ а/см}^2$. В электролизерах с широким анодом ее величина возрастает примерно в 1,5 раза.

Уменьшение величины горизонтальной составляющей может быть достигнуто соответствующим подбором индивидуальных шин, подводящих ток к стержням. Для того чтобы все стержни находились в равных условиях, т. е. чтобы они были эквипотенциальны, проводимость всех шин должна быть равна.

2. ПАДЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОЛИТЕ

Для расчета омического падения напряжения Δu в алюминиевом электролизере обычно применяют такие формулы:

$$\Delta u = I \rho \frac{h}{\sqrt{S_a \cdot S_k}}, \quad (51)$$

где h — междуэлектродное расстояние;
 I — ток;
 S_a и S_k — площади анода и катода.

$$\Delta u = I \rho \frac{h}{(A + 30)(B + 30)}, \quad (52)$$

где A и B — длина и ширина анода, см.

Исследования, проведенные Форсбломом и Машовцом [58], показали, что расчет падения напряжения по формулам (51) и (52) дает заметно пониженный результат. По их данным более точные результаты получаются при расчете Δu по формуле:

$$\Delta u = I \rho \frac{h}{AB + p(h + 2,5)}, \quad (53)$$

где $p = 2(A + B)$.

Эта формула справедлива при значениях $h = 3 \div 10$ см и $H \geq 5h$, где H — расстояние от анода до боковых стенок электролизера, которое практически всегда в 5 и более раз превышает междуэлектродное расстояние.

Напомним, что омическое падение напряжения зависит не только от геометрической характеристики электролитической ячейки, но и от поляризуемости электродов.

Однако в алюминиевом электролизере, как показали Форсблом и Машовец [58], значение поляризуемости настолько мало, что практически не влияет на величину омического падения напряжения. С достаточной для практики точностью поверхности анода и катода можно считать эквипотенциальными, если будет обеспечен соответствующий равномерный подвод тока.

Сопротивление электролита в электролизере можно вычислить также, воспользовавшись аналитическим методом определения распределения потенциала и тока в элементах $ABCD$ и $BDEF$ (см. рис. 53), если в точках B_1 и C_1 (рис. 58) напряженность поля близка к напряженности в области равномерного поля. Задача эта решена автором совместно с В. Цукерником.

Рассмотрим, например, электролизер с одним электродом, работающий с неизолированными боковыми стенками. Вначале определяем сопротивление R_1 электролита, находящегося в области $KLMRSTU$ (разрез $I-I$, рис. 58). Затем находим сопротивления R_2 и R_3 электролита в областях $ABML$ и $CDST$, а после этого — общее сопротивление.

Сопротивление R_1 , очевидно, будет равно половине сопротивления элемента BA_1C (рис. 55). Найдем ток, протекающий в электролите между двумя силовыми линиями по всей глубине рассматриваемой области вдоль l_1 . Пусть одна силовая линия начинается в точке B (рис. 55), лежащей на стороне A_1A_4 катода, а вторая — в точке C на стороне A_1A_2 . Расстояние A_1B рав-

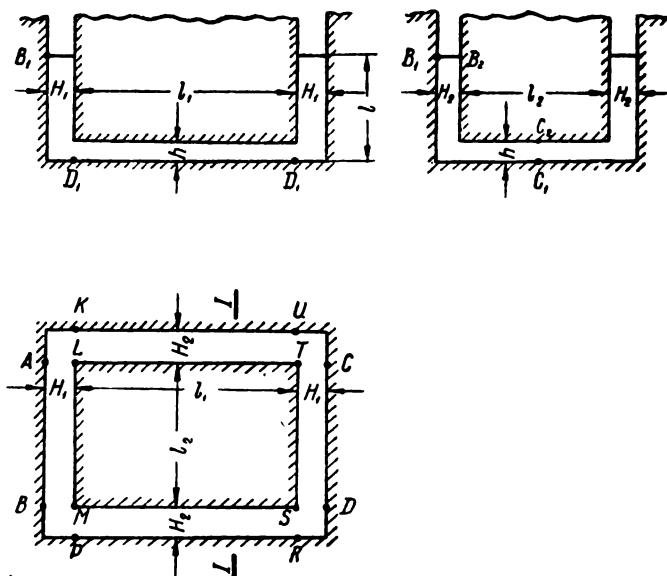


Рис. 58

но высоте электролита в электролизере l , а расстояние A_1C выбирается равным $\frac{l_2}{2} + H_2$. Пусть указанным точкам B_1 и C_1 (см. рис. 58) соответствуют в плоскости w_1 точки с абсциссами b ($0 > b > -\infty$) и c ($0 < c < 1$) на оси u_1 . Тогда с помощью (42) и (44) получим:

$$I_{B_1C_1} = \frac{l_1}{\rho} \int_{B_1}^{C_1} E |dz|, \quad (54)$$

где интеграл берется вдоль катода.

Подставляя значение E из (41) и заменяя dz на $\frac{dz}{dw_1} dw_1$, получим:

$$I_{B_1C_1} = \frac{\varphi_0 l_1}{\pi \rho} \int_b^c \frac{dw_1}{1 - w_1} = \frac{\varphi_0 l_1}{\pi \rho} \ln \frac{1 - b}{1 - c}, \quad (55)$$

куда сопротивление будет равно

$$R'_1 = \frac{\varphi_0}{I_{BC}} = \frac{\pi \rho}{l_1 \ln \frac{1-b}{1-c}}. \quad (56)$$

Координаты точек b и c могут быть определены по заданным координатам B_1 и C_1 из формулы (38).

Чтобы определить сопротивление R_2 , найдем ток, протекающий в электролите между двумя силовыми линиями по всей глубине области l_2 . Одна из линий начинается в точке B_1 и другая — в точке D_1 , которая соответствует точке d .

По аналогии с (56)

$$R_2 = \frac{\pi \rho}{l_2 \ln \frac{1-b}{1-d}}, \quad (57)$$

где b и d — точки на оси u_1 в плоскости w_1 , соответствующие точкам B_1 и D_1 в плоскости z .

Так как R_2 равно R_3 и $R_1 = \frac{1}{2} R'_1$, то общее сопротивление электролита R можно найти из формулы:

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{R'_1} + \frac{2}{R_2} = \frac{2}{\pi \rho} \left[l_1 \ln \frac{1-b}{1-c} + l_2 \ln \frac{1-b}{1-d} \right]; \quad (58)$$

при этом пренебрегаем сопротивлением электролита в углах электролизера.

Если электролизер работает с изолированными гарнессажем боковыми стенками, то для расчета сопротивления подлежит рассмотрению элемент $BDEF$ (рис. 53). Для этого найдем сопротивление части электролита, отнесенное к единице толщины слоя, заключенного между силовыми линиями, выходящими из точек B_2 и C_2 анода. Ток, протекающий в этой области, равен:

$$I = \frac{1}{\rho} \int_{B_2}^{C_2} E |dz|. \quad (59)$$

Точки B_2 и C_2 анода (рис. 58) соответствуют точкам b и c вещественной оси на плоскости w_2 . При этом $1 < c < a$ и $a < b < \infty$ (рис. 55).

Переходя в интеграле (59) к переменной интегрирования w_2 , получим, пользуясь формулой (16):

$$I = \frac{1}{\rho} \int_b^c E \left| \frac{dz}{dw_2} \right| dw_2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{2\varphi_0}{\pi} \int_b^c \frac{dw_2}{w_2 - 1} \quad (60)$$

или

$$I = \frac{\varphi_0}{\pi\rho} \ln \left(\frac{b+1}{b-1} \cdot \frac{c-1}{c+1} \right). \quad (61)$$

Отсюда искомое сопротивление равно:

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{\pi\rho}{\ln \left(\frac{b+1}{b-1} \cdot \frac{c-1}{c+1} \right)}. \quad (62)$$

По аналогии с (58) общее сопротивление электролита в электролизере с изолированными боковыми стенками определится из формулы:

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi\rho} \left[l_1 \ln \left(\frac{b+1}{b-1} \cdot \frac{c-1}{c+1} \right) + l_2 \ln \left(\frac{b+1}{b-1} \cdot \frac{a-1}{b+1} \right) \right]. \quad (63)$$

Для расчета сопротивления по формуле (63), исходя из заданных размеров электролизера и уровня электролита, определяют положение точек B_2 и C_2 на аноде (в плоскости z). Далее по уравнению (16) определяют величины b и c , соответствующие B_2 и C_2 . Величина a определена формулой (9).

Рассмотрим поле между коаксиальными цилиндрами. С таким расположением электродов на практике встречаются при осаждении металла на внутреннюю поверхность труб, при электролитическом получении хлора. Близкую форму имеет поле электролизера для электролитического получения танталового порошка.

Пусть радиус внутреннего электрода — r_1 и потенциал $\varphi=0$, радиус другого электрода — r_2 и потенциал φ_0 .

Запишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Из соображений симметрии очевидно, что поле не зависит от Z и θ . Следовательно, производные $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ и (1) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0. \quad (2)$$

Интегрируя, получим:

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C_1 \quad (3)$$

и после вторичного интегрирования (3)

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2. \quad (4)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий $\varphi=0$ при $r=r_1$ и $\varphi=\varphi_0$ при $r=r_2$. Следовательно,

$$0 = C_1 \ln r_1 + C_2; \quad (5)$$

$$\varphi_0 = C_1 \ln r_2 + C_2, \quad (6)$$

откуда

$$C_1 = \frac{\varphi_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad C_2 = -\frac{\varphi_0 \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad \varphi = \frac{\varphi_0 \ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (7)$$

Найдем напряженность и плотность тока i :

$$i = \frac{E}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\varphi_0}{\rho r \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (8)$$

Соответственно плотность тока на поверхности электродов будет равна:

$$i_{r=r_1} = \frac{\varphi_0}{\rho r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad i_{r=r_2} = \frac{\varphi_0}{\rho r_2 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (9)$$

Полный ток в электролизере

$$I = 2\pi r_1 l i = \frac{2\pi l \varphi_0}{\rho \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (10)$$

где l — высота цилиндра.

Используя (7) и (10), найдем сопротивление электролита в электролизере:

$$R = \frac{\varphi_0}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (11)$$

Как видно из (11), сопротивление электролита, ограниченного коаксиальным цилиндром, не зависит от абсолютной величины радиусов цилиндров, а только от их отношения.

Выделяемая дифференциальная мощность равна:

$$\frac{d\omega}{dv} = \rho i^2 = \frac{\varphi_0^2}{\rho r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (12)$$

Отношение выделяемой дифференциальной мощности у обоих электродов

$$\frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)_{r=r_1}}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)_{r=r_2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (13)$$

Из (13) можно заключить, что при достаточно большом отношении $\frac{r_2}{r_1}$ почти вся мощность будет выделяться в зоне электролита, примыкающей к меньшему цилиндру.

В случае покрытия металлами внутренней поверхности цилиндрических деталей, например труб, как правило, применяют проволочный цилиндрический анод, строго центрированный относительно оси трубы. При большой длине анода на распределении тока скажется падение потенциала в теле анода.

Распределение тока с учетом падения напряжения в теле анода было рассмотрено Вайсельбергом [62]. Он дал приближенное решение вопроса о распределении тока на внутренней поверхности полого цилиндра, допустив, что электродная поляризация не зависит от плотности тока и что направление вектора напряженности совпадает с направлением радиусов, т. е. не изменяется из-за изменения потенциала в теле анода. Учитывая указанные допущения, плотность тока на внутренней поверхности полого цилиндра с радиусом r_2 на расстоянии x от его верхнего края определится из уравнения:

$$i_x = \frac{I \alpha \operatorname{ch} \alpha (l - x)}{2\pi r_2 \operatorname{sh} \alpha l}, \quad (14)$$

где l — длина анода, см;

I — общий ток;

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_a}{R_9}};$$

R_a — сопротивление анода на единицу длины, ом/см;

R_9 — сопротивление (ом/см) кольца раствора, образованного анодом, внутренней поверхностью покрываемого цилиндра и плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндра, отстоящими одна от другой на 1 см.

Вебер [63] внес поправку в формулу (14), учитывающую катодную и анодную поляризацию. При этом Вебер положил, что анодная (φ_a) и катодная (φ_k) поляризация находятся в линейной зависимости от плотности тока $\varphi_a = \varphi_{a0} + ai$ и $\varphi_k = \varphi_{k0} + bi$. С указанной поправкой (14) примет вид:

$$i_x = \frac{\beta I \operatorname{ch} \beta (l - x)}{\pi \alpha \operatorname{sh} \beta l}, \quad (15)$$

где

$$\beta^2 = \frac{R_a}{R_9 + p} \quad \text{и} \quad p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{2r_2} + \frac{b}{2r_1} \right)$$

(r_1 — радиус анода).

Более точно эта задача была решена Исизака [31].

При решении им были сделаны следующие допущения:

1) сечение полого (внешнего) цилиндра с радиусом r_2 настолько велико, что падением напряжения в теле цилиндра можно пренебречь;

2) сопротивление внутреннего цилиндра с радиусом r_1 учитывают, пренебрегая изменением потенциала в радиальном направлении по его сечению;

3) потенциал полого цилиндра не зависит от плотности тока и принимается равным нулю;

4) потенциал внутреннего цилиндра находится в линейной зависимости от плотности тока;

5) вектор напряженности нормален по отношению к поверхности внутреннего цилиндра.

Напишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

(от θ поле не зависит).

Граничные условия в данном случае следующие:

$$\varphi_{r=r_2} = 0; \quad (16)$$

$$b \left| \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=r_1} \right| = \varphi_k - (\varphi_m - \varphi_0)_{r=r_1}, \quad (17)$$

где b — постоянная;

$\varphi_m - \varphi_0$ — скачок потенциала на границе катод — электролит при $t=0$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=l} = 0. \quad (18)$$

Общий ток I в электролизере найдем из формулы:

$$I = \pi r_1^2 \frac{1}{\rho_k} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right)_{r=r_1} + \int_0^z 2\pi r_1 \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right)_{r=r_1} dz, \quad (19)$$

где ρ_k и ρ_2 — соответственно удельное сопротивление материала внутреннего электрода и электролита;
 $2\pi r_1 dz$ — элементарная поверхность внутреннего цилиндра;

$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r_a} 2\pi r_1 dz$ — ток, выходящий из элементарного цилиндра в электролит.

Весь интеграл представляет собой полный ток, выходящий из внутреннего цилиндра до точки z ; $\pi r_1^2 \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{r=r_1}$ представляет собой ток, идущий по внутреннему цилиндру от точки z .

Находим решение для φ в виде ряда Фурье:

$$\varphi = \alpha \left\{ r_1 \ln \frac{r}{r_2} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{l}{n\pi} \right) \left[\frac{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} - \frac{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{J \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} \right] \cos \frac{n\pi}{l} z \right\}, \quad (20)$$

H_0 и J_0 представляют собой функции Генкеля и Бесселя нулевого порядка, которые табулированы и пользование которых

ми не представляет бóльшей трудности, чем пользование тригонометрическими таблицами.

Постоянные α и A_n определяются из (17) и (19). Для этого дифференцируем (17) по z , значение $\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}$ подставляем в (19) и, сопоставляя с (20), находим значения α и A_n :

$$\alpha = \rho_3 \frac{l}{2\pi r_1 l}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_n} = & \frac{1}{4} \left\{ b r_1 \frac{1}{\rho_k} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + 2 \right\} \times \\ & \times \left[\frac{H_1 \left(\frac{n\pi}{l} r_1 \right)}{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} + \frac{J_1 \left(\frac{n\pi}{l} r_1 \right)}{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} \right] + \\ & + \frac{r_1 \rho_3}{\rho_k} \left(\frac{n\pi}{l} \right) \left[\frac{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} - \frac{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} \right], \quad (22) \end{aligned}$$

где H_1 и J_1 — соответственно функции Генкеля и Бесселя первого порядка, равные первым производным H_0 и J_0 .

Подставляя значения α и A_n в (20), получим:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{l \rho_3}{2\pi r_1 l} \left\{ r_1 \ln \frac{r}{r_2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \frac{l}{n\pi} \left[\frac{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} \right] \cos \frac{n\pi}{l} z}{\left\{ b \frac{r_1}{\rho_k} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 + 2 \right\} \left[\frac{H_1 \left(\frac{n\pi}{l} r_1 \right)}{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} + \right.} \right. \\ & \left. \left. + \frac{J_1 \left(\frac{n\pi}{l} r_1 \right)}{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} \right] + \frac{r_1 \rho_3}{\rho_k} \left(\frac{n\pi}{l} \right) \left[\frac{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{H_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} - \frac{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right)}{J_0 \left(\frac{n\pi}{l} r_2 \right)} \right]} \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Из (23) определяем i_k , дифференцируя по r .

$$i_k = \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=r_1} . \quad (24)$$

Очевидно, что при малом сопротивлении малого цилиндра распределение тока будет практически равномерным. Чем больше плотность тока, тем менее равномерно распределится ток на электроде.

Если в процессе электролиза не происходит выделения газобразной фазы и, следовательно, электролит можно считать практически однородным¹, то равномерное распределение тока по высоте может быть обеспечено разносторонним его подводом. При этом должно быть выбрано такое сечение внешнего цилиндра, чтобы падение напряжения в нем равнялось падению напряжения в теле внутреннего цилиндра, для чего их омические сопротивления должны быть равными.

$$\rho_2 \frac{l}{\pi (r_n^2 - r_2^2)} = \rho_1 \frac{l}{\pi r_1^2} , \quad (25)$$

где l — длина электродов;
 r_1 — радиус внутреннего электрода;
 r_n и r_2 — наружный и внутренний радиусы полого электрода;
 ρ_2 и ρ_1 — удельное сопротивление наружного и внутреннего электродов.

В зависимости от требований, предъявляемых практикой, может возникнуть задача подбора сечения внешнего цилиндра по заданному сечению внутреннего цилиндра или, наоборот, подбора сечения внутреннего цилиндра.

В первом случае

$$r_n = \sqrt{\frac{\rho_2}{r_1} r_1^2 + r_2^2} ; \quad (26)$$

во втором случае

$$r_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} (r_n^2 - r_2^2)} . \quad (27)$$

ЗАДАЧА ЦЕНТРОВКИ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ

При размерном хромировании, железнении или никелировании деталей, имеющих форму круговых цилиндров, для равномерного распределения металла по покрываемой поверхности анодам зачастую придают форму полого кругового цилиндра.

Иногда покрытию подвергают внутреннюю поверхность полого цилиндра, например, внутреннюю поверхность труб, порш-

¹ В отдельных случаях следует принять меры против расслаивания электролита.

невых колец и т. д. При этом применяют аноды в форме цилиндрического стержня. В результате получается рассмотренная выше система из двух электродов — коаксиальных цилиндров.

Во всех случаях для получения достаточной равномерности покрытия в системе двух коаксиальных цилиндров необходимо отцентровать покрываемый предмет и анод. Необходимая точность центровки будет зависеть от заданных допусков на исполнение деталей и от размеров деталей и анодов.

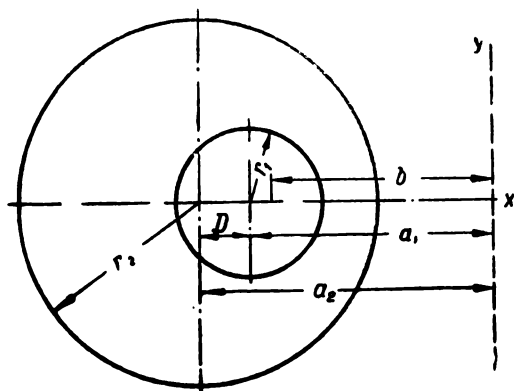


Рис. 59

При этом возникает задача расчета допусков при центровке коаксиальных цилиндров.

Критерием для оценки равномерности при размерном гальваническом осаждении металлов служит отношение толщины слоя металла на участке с максимальной плотностью тока к толщине слоя на участке с минимальной плотностью тока.

Для определения неравномерности распределения тока, вызванной неточной центровкой, рассмотрим поле двух круговых цилиндров, один из которых помещен внутри другого и оси которых не совпадают.

Воспользуемся известными формулами для вычисления координат электрической оси [4] и формулами для расчета плотности тока в заданной точке (см. стр. 00).

Уравнения поверхностей цилиндров в соответствии с чертежом (рис. 59):

$$(x - a_1)^2 + y^2 = r_1^2; \quad (28)$$

$$(x - a_2)^2 + y^2 = r_2^2, \quad (29)$$

причем линия $x = 0$ представляет собой проекцию плоскости нулевого потенциала.

Координата электрической оси, общей для обоих цилиндров, определится из известного соотношения:

$$x_{\text{э.о}} = b = \sqrt{a_1^2 - r_1^2} = \sqrt{a_2^2 - r_2^2}. \quad (30)$$

Обозначив эксцентриситет $a_2 - a_1 = B$, можем записать:

$$a_2 - a_1 = B; \quad a_2 + a_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{B}, \quad (31)$$

откуда

$$a_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - B^2}{2B}; \quad (32)$$

$$a_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + B^2}{2B}. \quad (33)$$

Плотность тока на поверхности большего цилиндра, как функция координаты x , может быть определена из (34):

$$i_2 = \frac{I}{2\pi h} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2 - r_2^2}}{xr_2}. \quad (34)$$

Плотность тока на поверхности меньшего цилиндра

$$i_1 = \frac{I}{2\pi h} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 - r_1^2}}{xr_1}. \quad (35)$$

Введя обозначения: $i_{\text{макс}_1}$, $i_{\text{мин}_1}$, $i_{\text{ср}_1}$ — соответственно максимальная, минимальная и средняя плотности тока на малом цилиндре; $i_{\text{макс}_2}$, $i_{\text{мин}_2}$, $i_{\text{ср}_2}$ — соответственно максимальная, минимальная и средняя плотности тока на большом цилиндре и используя (34) и (35), получим:

$$i_{\text{мин}_1} = \frac{I}{2\pi h} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 - r_1^2}}{(r_1 + a_1)r_1}; \quad i_{\text{мин}_2} = \frac{I}{2\pi h} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2 - r_2^2}}{(r_2 + a_1)r_2}; \quad (36)$$

$$i_{\text{макс}_1} = \frac{I}{2\pi h} \cdot \frac{\sqrt{a_1^2 - r_1^2}}{(a_1 - r_1)r_1}; \quad i_{\text{макс}_2} = \frac{I}{2\pi h} \cdot \frac{\sqrt{a_2^2 - r_2^2}}{(a_2 - r_2)r_2}; \quad (37)$$

$$i_{\text{ср}_1} = \frac{I}{2\pi hr_1}; \quad i_{\text{ср}_2} = \frac{I}{2\pi hr_2}. \quad (38)$$

Положив $r_1 = 1$; $m_1 = \frac{r_2}{r_1}$; $p = \frac{B}{r_1}$, найдем:

$$i_{\text{мин}_1} = i_{\text{ср}_1} \sqrt{\frac{m^2 - (p+1)^2}{m^2 - (p-1)^2}}, \quad (39)$$

$$i_{\text{макс}_1} = i_{\text{ср}_1} \sqrt{\frac{m^2 - (p-1)^2}{m^2 - (p+1)^2}}. \quad (40)$$

Соответственно для цилиндра с большим радиусом r_2

$$i_{\min_2} = i_{\text{ср}_2} \sqrt{\frac{(m-p)^2 - 1}{(m+p)^2 - 1}}; \quad (41)$$

$$i_{\max_2} = i_{\text{ср}_2} \sqrt{\frac{(m+p)^2 - 1}{(m-p)^2 - 1}}. \quad (42)$$

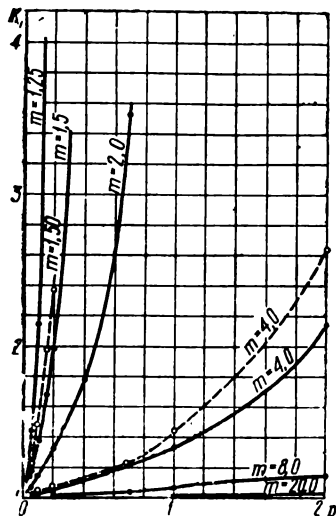


Рис. 60. Зависимость $K_1 = \frac{i_{\max_1}}{i_{\min_1} \frac{B}{r_1}}$ от величины параметра $\frac{B}{r_1}$

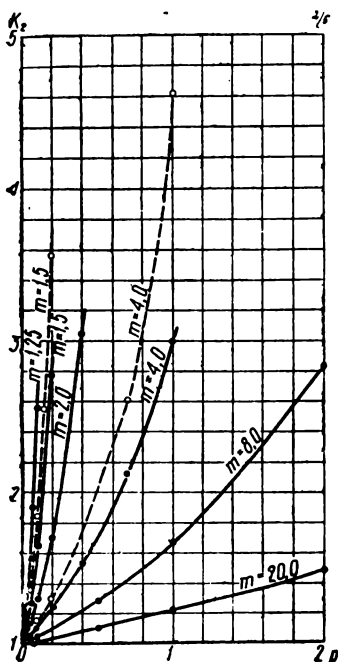


Рис. 61. Зависимость $K_2 = \frac{i_{\max_2}}{i_{\min_2} \frac{B}{r_1}}$ от величины параметра $\frac{B}{r_1}$

Используя (39), (40), (41) и (42) для расчета коэффициентов неравномерности, получим

$$K_1 = \frac{i_{\max_1}}{i_{\min_1}} = \frac{m^2 - (p-1)^2}{m^2 - (p+1)^2}; \quad (43)$$

$$K_2 = \frac{i_{\max_2}}{i_{\min_2}} = \frac{(m+p)^2 - 1}{(m-p)^2 - 1}. \quad (44)$$

Отношения толщин покрытия определяют путем умножения плотности тока на соответствующее значение выхода по току.

На рис. 60 и 61 приведены кривые зависимости K_1 и K_2 от параметра $p = \frac{B}{r_1}$ при различных значениях параметра $m = \frac{r_2}{r_1}$.

На этих же рисунках приведены кривые изменения K_1 и K_2 для значений параметров $m = 4$ и $m = 1,5$ с учетом выходов по току при процессе хромирования.

Максимально допустимую величину эксцентриситета находят следующим образом.

Допустим, что отношение радиуса анода r_2 к радиусу покрываемого предмета r_1 равно четырем ($m = 4$) и что, исходя из существующих допусков, задано максимально-допустимое отношение толщин в точках, наиболее близкой и наиболее удаленной от анодов. По рис. 60 на ординате находим соответствующее значение K_1 и проводим горизонтальную линию до пересечения с пунктирной кривой $m = 4$. Из точки пересечения восстанавливаем перпендикуляр к оси x и находим искомое значение p , а затем и максимально допустимую величину эксцентриситета $B = pr_1$.

Для расчета распределения тока с учетом поляризации используем формулу:

$$r = \frac{1}{G} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{\frac{a_1}{r_1} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 - 1}}{\frac{a_2}{r_2} + \sqrt{\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^2 - 1}}. \quad (45)$$

Проводимость трубок электролита, опирающихся на участки с плотностью тока i_{\max} и i_{\min} , определяем из соотношения:

$$I \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{\frac{a_1}{r_1} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 - 1}}{\frac{a_2}{r_2} + \sqrt{\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^2 - 1}} = \frac{i_{\max} h d s}{d G_{\max}} = \frac{i_{\min} h d s}{d G_{\min}}. \quad (46)$$

Далее составляем эквивалентную схему и рассчитываем действительную плотность тока с учетом катодной поляризации.

Для учета влияния анодной поляризации воспользуемся уравнением силовой линии, проходящей через заданную точку x_i, y_i (см. стр. 88):

$$x_i^2 + (y_i - y_c)^2 = y_c^2 - r_1^2 + a_1^2, \quad (47)$$

из которого найдем значение y_c — координату центра окружности, представляющей собой силовую линию.

Из уравнения

$$a_1^2 - r_1^2 + y_c^2 = r_c^2 \quad (48)$$

определяем радиус силовой линии r_c , после чего находим точку пересечения заданной силовой линии с проекцией анода (окружности с радиусом r_i), решая совместно уравнения (49) и (50):

$$x^2 + (y - y_c)^2 = r_c^2; \quad (49)$$

$$(x - a_2)^2 + y^2 = r_2^2. \quad (50)$$

В найденной точке определяем анодную плотность тока по сравнению (34), находим отношение анодной и катодной плотностей тока i и вычисляем действительную плотность тока с учетом катодной и анодной поляризации.

Если катодом будет служить полый цилиндр большего радиуса, то действительная плотность тока может быть найдена аналогичным путем.

ГЛАВА VI

ВЛИЯНИЕ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ЭЛЕКТРОЛИТА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА НА ЭЛЕКТРОДАХ

Процессы электролитического выделения металлов из водных растворов и из расплавленных сред в большинстве случаев сопровождаются выделением газообразной фазы как на аноде, так и на катоде.

При электролитическом извлечении металлов применяют только нерастворимые аноды, на которых в процессе электролиза выделяется исключительно газообразная фаза. Так, в магниевых электролизерах на аноде выделяется хлор, в алюминиевых — углекислый газ, в электролизерах для извлечения цинка — кислород и т. д. При электролитическом рафинировании металлов и в гальваностегических процессах на аноде также могут продуцироваться газовые пузырьки, однако большая часть тока (обычно 85—100%) идет на растворение анодного металла.

На катоде во всех случаях большая часть тока расходуется на выделение металла и лишь сравнительно небольшая его часть — на выделение водорода (в водных растворах). При электролитическом выделении цинка в зависимости от условий ведения процесса на выделение водорода может расходоваться до 15% всего тока, при рафинировании никеля — до 8%, при рафинировании олова — до 20%.

Помимо того, в электролит могут попасть различные проводящие и непроводящие включения. Так, при рафинировании никеля из-за неравномерного растворения происходит механическое разрушение анодов; при этом мельчайшие частички металла выкрашиваются, выпадая в шлам и частично оставаясь некоторое время в электролите.

В алюминиевых электролизерах вследствие неравномерного сгорания угольного анода происходит осыпание отдельных его частиц. Кроме того, некоторое количество угольных частиц может попасть из футеровки электролизера, которая так же состоит из углеродистых материалов. В зависимости от условий частички угля, попавшие в электролит, могут всплывать на поверхность в виде «угольной пены» или могут оставаться длительное время в электролите во взвешенном состоянии, занимая до 15—20% всего объема. В отдельных, сравнительно редко встречающихся случаях частицы угля вступают в химическое взаимодействие

с алюминием, образуя карбид, который также остается во взвешенном состоянии в электролите, вредно сказываясь на протекании электролиза.

Наличие в электролите газовых пузырьков, непроводящих или проводящих включений снижает его электропроводность. Отметим, что проводящие включения снижают электропроводность электролита так же, как и непроводящие. Ток через непроводящие частицы сможет пройти только в том случае, если на поверхности частиц будет происходить разряд ионов (положительных — с одной стороны частицы и отрицательных — с другой). Однако, поскольку эти процессы всегда сопровождаются поляризацией, то разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ в точках, соответствующих противоположным участкам частицы, окажется недостаточной для протекания электрохимического процесса.

Уменьшение проводимости электролита зависит от степени заполнения его включениями, а также от формы включений.

Если включения имеют шарообразную форму, то относительная электропроводность электролита K_c может быть рассчитана по формуле, выведенной Релеем [64]:

$$K_c = \frac{x_c}{x_0} = 1 - \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon - 0,392\varepsilon^{10/3}}, \quad (1)$$

где x_0 и x_c — удельная электропроводность чистого электролита и электролита, содержащего включения;

ε — относительное заполнение объема, равное отношению объема включений к общему объему.

При малых относительных заполнениях $\varepsilon \ll 1$ уравнение (1) можно упростить, пренебрегая высшими степенями ε :

$$K_c = \frac{1 - \varepsilon}{1 + 0,5\varepsilon} \sim 1 - 1,5\varepsilon. \quad (2)$$

Для включений, имеющих форму цилиндров, оси которых перпендикулярны направлению линий тока, можно использовать формулу Рунге [65]:

$$K_c = 1 - \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon - 0,306\varepsilon^4}. \quad (3)$$

При $\varepsilon \ll 1$ после упрощения (3) получим

$$K_c = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \sim 1 - 2\varepsilon. \quad (4)$$

Если включения имеют форму цилиндров, оси которых совпадают с направлением тока, то

$$K_c = 1 - \varepsilon. \quad (5)$$

Машовец [64] на основании экспериментального исследова-

ния влияния непроводящих включений цилиндрической и шарообразной формы вывел эмпирическую формулу для расчета K_c :

$$K_c = 1 - 1,78\varepsilon + \varepsilon^2. \quad (6)$$

Для цилиндрических включений эта формула была проверена им также путем графического построения поля.

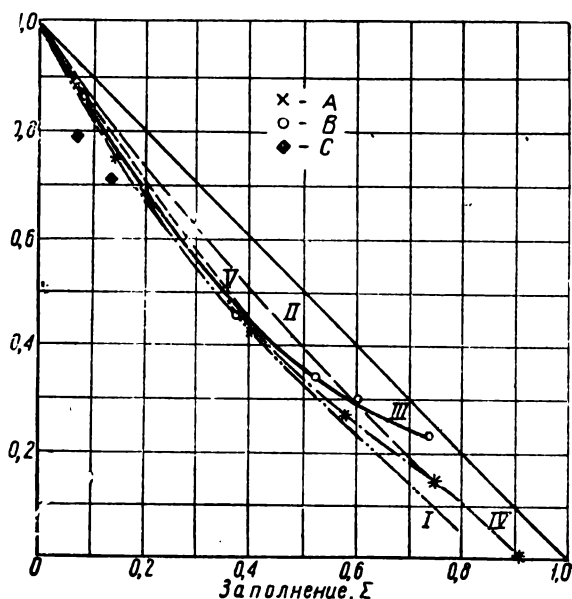


Рис. 62. Зависимость проводимости от заполнения непроводящими включениями (по В. П. Машовцу), соответствующая:

I — уравнению Релея для цилиндрических включений;
II — уравнению Релея для шарообразных включений;
III — эмпирической формуле Машовца; *IV* — экспериментальным данным Машовца для цилиндрических включений; *V* — экспериментальной кривой, приводимой Пфлейдерером; *A* — данным Машовца для цилиндрических включений (полученных экспериментально и графическим построением поля); *B* — экспериментальным данным Машовца для шарообразных включений; *C* — данным Баймакова

Формула (6) действительна для любого расположения шаров (кубооктаэдрического, гексагонального и октаэдрического) и для любого заполнения вплоть до максимально плотной упаковки $\varepsilon = 0,74$.

Для цилиндрических включений эта формула дает достаточную для техники точность при $\varepsilon < 0,4$.

На рис. 62 приведены кривые изменения относительной электропроводности в зависимости от коэффициента заполнения ε , вычисленные по различным формулам и полученные по экспериментальным данным Машовца [64] и Пфлейдерера [66].

Непроводящие и проводящие включения, особенно газовые пузырьки, неравномерно распределяются в электролите. Это особенно сказывается при вертикальном расположении электродов. Естественно, что заполнение электролита газовой фазой будет возрастать от нижней к верхней зоне электролита.

Рассмотрим, как будет изменяться заполнение газовой фазой по высоте в случае плоских параллельных электродов, перекрывающих все сечение электролита, и в случае электродов — коаксиальных цилиндров.

При установившемся электрохимическом процессе количество газообразной фазы в любом элементарном объеме электролизера dv остается постоянным (рис. 63). При этом количество образующейся газообразной фазы и поступающей с нижних слоев электролита в единицу времени будет равно количеству газообразной фазы, покидающей рассматриваемый элементарный объем в течение того же времени.

Пусть в самом нижнем слое в течение секунды образуется объем газообразной фазы dv_r . При установившемся процессе это же количество покинет нижний слой и будет перенесено в следующий слой. В этом слое (если считать плотность тока на любом участке электродов одинаковой) в секунду также образуется dv_r газообразной фазы и из нижнего слоя также поступит dv_r . Следовательно, покинет рассматриваемый слой в течение секунды $2dv_r$. Соответственно n -й участок в секунду покинет ndv_r . Через элементарный слой электролита, отстоящий от нижнего края цилиндра на расстоянии $h - z$, в течение секунды будет перенесено $\frac{dv_r}{dz} (h - z)$ газообразной фазы.

Если скорость подъема газообразной фазы составляет u см/сек, то в элементарном слое с высотой dz будет содержаться газообразной фазы

$$\frac{dv_r}{dz} (h - z) \frac{dz}{u} = \frac{h - z}{u} dv_r. \quad (7)$$

Объем газообразной фазы, образующейся на поверхности электродов в элементарном объеме в течение секунды, в случае плоских параллельных электродов

$$dv_r = (k_k \eta_k + k_a \eta_a) bidz. \quad (8)$$

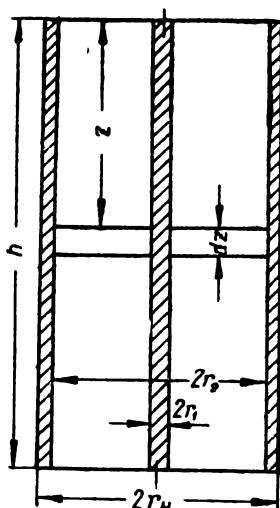


Рис. 63. К расчету газонаполнения электролита

В случае электродов, представляющих собой коаксиальные цилиндры,

$$dv_r = 2\pi (k_k \eta_k i_k r_2 + k_a \eta_a i_a r_1) dz^*, \quad (9)$$

где k_k, k_a — соответственно электрохимические эквиваленты анодной и катодной реакции в пересчете на объем газа, приведенного к нормальным условиям;

i_k, i_a — плотности тока на катоде и аноде;

η_k, η_a — выход газообразной фазы по току на катоде и аноде;

b — ширина плоского электрода.

Подставляя значение dv_r из (8) или (9) в (7) и учитывая поправку на температуру и дополнительное сжатие, вызванное давлением электролита, определим объем газообразной фазы в элементарном объеме.

В случае плоских параллельных электродов

$$\frac{h-z}{u} (k_k \eta_k + k_a \eta_a) bi \frac{T}{273 \left(p + \frac{z \gamma}{1000} \right)} dz. \quad (10)$$

В случае коаксиальных цилиндров

$$\frac{h-z}{u} 2\pi (k_k \eta_k i_k r_2 + k_a \eta_a i_a r_1) \frac{T}{273 \left(p + \frac{z \gamma}{1000} \right)} dz, \quad (11)$$

где p — измеренное атмосферное давление, *атм*;

γ — удельный вес электролита;

T — температура электролита;

z — высота слоя электролита над рассматриваемым объемом, *см*.

Объем элементарного слоя электролита в случае плоских электролитов

$$dv = bldz, \quad (12)$$

где l — расстояние между электродами.

Из (10) и (12) определяем относительное заполнение объема газовой фазой на высоте $h-z$:

$$\epsilon = \frac{h-z}{u} \cdot \frac{(k_k \eta_k + k_a \eta_a) i}{l} \cdot \frac{T}{273 \left(p + \frac{z \gamma}{1000} \right)}. \quad (13)$$

Объем элементарного слоя электролита в случае коаксиальных цилиндров

$$dv = 2\pi (r_2 - r_1) dz. \quad (12a)$$

* Для случая, когда катодом служит полый цилиндр.

Относительное заполнение объема газообразной фазой

$$\epsilon = \frac{h-z}{u} \cdot \frac{k_k \eta_k i_k r_2 + k_a \eta_a i_a r_1}{r_2 - r_1} \cdot \frac{T}{273 \left(p + \frac{z \gamma}{1000} \right)}. \quad (13a)$$

В формуле (13) и (15) для расчета относительного заполнения ϵ входит величина u — скорость подъема газовых пузырьков.

В спокойной жидкости режим движения газовых пузырьков будет зависеть от числа Рейнольдса

$$Re = \frac{ua}{\nu},$$

где a — радиус пузырька;

ν — кинематическая вязкость жидкой среды.

Пузырьки диаметром менее 0,01 см ($Re < 1$) поднимаются как твердые сферические частицы. Скорость их подъема может быть определена по закону Стокса:

$$u = -\frac{2}{9} \cdot \frac{ga^2}{\nu}, \quad (14)$$

где g — ускорение силы тяжести;

знак минус указывает, что пузырек поднимается вверх.

Отметим, что теоретический расчет, проведенный Левичем [10], приводит к другой формуле:

$$u = -\frac{1}{3} \cdot \frac{ga^2}{\nu}.$$

Действительно, опыты, проведенные Городецкой [10], по измерению скорости движения газовых пузырьков в воде, прокипяченной с перманганатом калия и затем дважды дистиллированной, в общих чертах дали сходные результаты с теоретической формулой Левича. В обычной же водопроводной воде газовые пузырьки движутся подобно твердым шарикам. Это Левич [10] объясняет адсорбцией поверхностно активных веществ на границе раздела жидкость—газ и образованием механически прочной пленки, приводящей к кажущемуся «отвердеванию» пузырьков.

Так как для приготовления электролитов в промышленности применяется только техническая вода, то расчет скорости подъема пузырьков следует вести по формуле (14).

При диаметрах пузырьков больше 0,01 см ($Re > 1$) формула (14) неприменима.

Так, при числах Рейнольдса $Re \gg 200 \div 300$ скорость подъема пузырьков может быть рассчитана по приближенной формуле:

$$u = 2 \sqrt{\frac{ga}{0,9}}. \quad (15)$$

При диаметре пузырьков $0,2-0,3$ см (Re близко к 700) происходит их заметная деформация. Они приобретают форму, близкую к сплюсненному эллипсоиду. Скорость пузырьков диаметром $0,2-1,5$ см ($Re = 700 \div 4500$) практически не зависит от их размера и равна $28-30$ см/сек. Пузырьки большего размера поднимаются с большими скоростями ($35-40$ см/сек).

В случае принудительного движения жидкости, направленного вдоль электродов для расчета действительной скорости подъема пузырьков, следует сложить скорость движения жидкости со скоростью движения газовых пузырьков в спокойной жидкости.

При выводе формул (1)–(6) для расчета относительной электропроводности предполагалось, что пузырьки газа равномерно распределены по всему объему электролита. Расчет осложняется, если происходит длительная задержка пузырьков (прилипание) у поверхности электродов [67, 68]. В этом случае формулы (1)–(6) не могут быть применены.

Неодинаковое заполнение электролита газообразной фазой по высоте приводит к неравномерному распределению тока на электродах. Плотность тока в каждой точке может быть приближенно рассчитана, если допустить, что векторы напряженности нормальны к поверхности электродов.

Неравномерность распределения тока может быть устранена подбором соответствующего сечения одного из электродов.

Рассмотрим случай коаксиальных цилиндров. Компенсирующим будем считать внутренний электрод, полагая, что он служит анодом. При расчете исходим из того, что соответствующий подбор сечения анода обеспечит равномерное распределение тока на поверхности покрываемого предмета — полового цилиндра.

Рассчитаем падение напряжения в электролизере u , которое будет складываться из падения потенциала в теле электродов, скачков потенциала на границах электрод — раствор и падения потенциала в произвольном слое электролита, находящегося на расстоянии z от верхнего края электродов.

$$u = \varphi_a - \varphi_k + e_k + e_a + \Delta\varphi, \quad (16)$$

где φ_a и φ_k — потенциалы анода и катода;

e_a и e_k — падение напряжения в теле анода и катода;

$\Delta\varphi$ — падение напряжения в электролите.

Так как ток равномерно распределяется по высоте электролизера, то падение напряжения в теле катода будет равно

$$e_k = \int_0^z \frac{\left(2i_k \pi r_2 h - 2i_k \pi r_2 h \frac{z}{h} \right) \rho_k dz}{\pi (r_n^2 - r_2^2)} = \frac{\rho_k i_k \pi r_2 z (h - z)}{\pi (r_n^2 - r_2^2)}, \quad (17)$$

где ρ_k — удельное сопротивление материала катода.

Потенциалы анода и катода φ_a и φ_k сохраняют неизменное значение по высоте. Они находятся по заданной плотности тока из поляризационных кривых.

Падение напряжения в электролите определится из выражения

$$\Delta\varphi = \pi r_2 \Delta z \frac{i_k}{G}, \quad (18)$$

где Δz — высота рассматриваемого слоя электролита;

G — проводимость рассматриваемого слоя электролита:

$$G = \frac{2\pi\Delta z}{\rho_2 \ln \frac{r_2}{r_1}} (1 - 1,78\varepsilon + \varepsilon^2). \quad (19)$$

Величину ε находим из (13 а).

Находим сумму $u = \varphi_a - \varphi_k + \Delta\varphi + e_k$ для различных значений z (от $z = 0$ до $z = h$) и строим график изменения u_z по высоте (рис. 64).

На рис. 64, а и б рассмотрены два возможных случая. Очевидно, в случае, изображенном на рис. 64, а, решающим фактором, определяющим изменение величины u_z по высоте, является газонаполнение электролита и, следовательно, должен быть выбран односторонний подвод тока к катоду и аноду. На рис. 64, б изменение величины u_z определяет в основном падение напряжения в теле катода; следовательно, должен быть осуществлен разносторонний подвод тока к электродам.

Радиус компенсирующего анода определяем следующим образом.

Аппроксимируем кривые $m_1 m_2$ и $m_1 n_2$ прямыми, которые описываются соответственно уравнениями:

$$e_a = i_k \pi r_2 \frac{2h - z}{2} \rho_a \frac{z}{\pi r_1^2}; \quad (20)$$

$$e_a = i_k \pi r_2 \frac{h + z}{2} \rho_a \frac{z}{\pi r_1^2}. \quad (21)$$

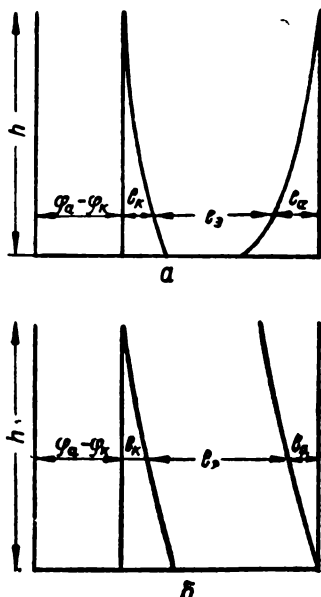


Рис. 64. Схема к расчету диаметра компенсирующего электрода

По рис. 64, *a* или 64, *б* находим значение e_a на различной высоте и, задаваясь соответствующими величинами e_a и z , определяем значения r_{1i} . Искомое значение r_1 будет найдено как среднее значение r_{1i} .

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАССТОЯНИИ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОДАМИ

Потери электроэнергии, вызванные омическим падением напряжения в электролите, могут колебаться в широких пределах (от 10 до 80 %) в зависимости от конструкции электролизера и характера электрохимических процессов.

Естественно поэтому стремление конструкторов максимально сократить расстояние между электродами. Однако, помимо ряда других технических причин, возможность уменьшения межуэлектродного расстояния ограничивается увеличением относительного заполнения электролита газовой фазой, приводящим к понижению электропроводности раствора. При достаточном большом сближении электродов относительное заполнение электролита газообразной фазой настолько возрастет, что вместо понижения омического падения напряжения, наоборот, произойдет его повышение.

Поэтому представляет технический интерес определение оптимального расстояния между электродами, при котором омическое падение напряжения будет минимальным.

Если задан радиус внутреннего электрода r_1 , то проводимость G определится из (22):

$$G = \frac{2\pi \Delta z}{\rho_s \ln \frac{r_2}{r_1}} (1 - 1,78\varepsilon + \varepsilon^2), \quad (22)$$

где r_2 — искомый внутренний радиус второго электрода — поло- го цилиндра.

Относительное заполнение газовой фазой

$$\varepsilon = \frac{\Delta v_r}{\Delta v_s} = \frac{\Delta v_r}{\pi (r_2^2 - r_1^2) \Delta z}. \quad (23)$$

Положив $\frac{r_2}{r_1} = m$ и $\frac{v_r}{\pi r_1^2 \Delta z} = t$ и подставив значение ε из (23)

в (22), получим:

$$G = \frac{2\pi \Delta z}{\rho_s \ln \frac{r_2}{r_1}} \left[1 - 1,78 \frac{t}{m^2 - 1} + \frac{t^2}{(m^2 - 1)^2} \right]. \quad (24)$$

Используя (24), строим график зависимости G от m при заданном значении t . Такие графики при значениях $t = 0,21$; 0,69 и 1,25 приведены на рис. 65 и 66. Очевидно, оптимальным бу-

дет такое значение m и соответствующее ему значение r_2 , при котором будет максимальной проводимость G .

Таким путем определяем r_2 для различных зон по высоте коаксиальных цилиндров (см. рис. 63), после чего вычерчиваем

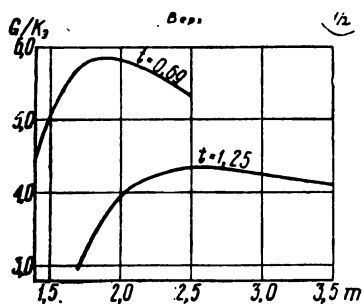


Рис. 65. Зависимость $\frac{G}{K_{\text{э}}}$ от параметра m ($K_{\text{э}}$ — удельная электропроводность электролита)

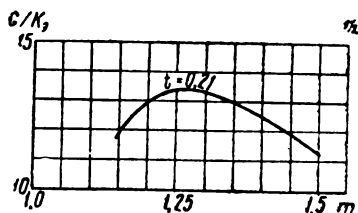


Рис. 66. Зависимость $\frac{G}{K_{\text{э}}}$ от параметра m

кривую — проекцию анода, обеспечивающего минимальное падение напряжения. Из конструктивных соображений целесообразно полученную кривую аппроксимировать прямой линией. В этом случае анод примет форму усеченного конуса.

Задача определения оптимального междуэлектродного расстояния для случая двух плоских параллельных электродов решается аналогично.

**ВЛИЯНИЕ МИКРОРЕЛЬЕФА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ТОКА НА ЭЛЕКТРОДАХ**

Неравномерное распределение тока на поверхности катода может привести к тому, что на отдельных его участках, обычно на краях, плотность тока может превысить допустимую величину. В таком случае осаждающийся металл отлагается в форме рыхлой порошкообразной массы, губки или дендритов. Помимо того, взвешенные в электролите частицы шлама при повышенных плотностях тока легче цементируются растущим осадком металла. Можно наблюдать, что при малых плотностях тока прилипшая к поверхности катода твердая частица отодвигается растущим осадком, оставаясь все время на поверхности. При высоких же плотностях тока частица легко перекрывается металлом. Подобное явление наблюдается и при кристаллизации расплавленного вещества. При медленном охлаждении расплав застывает так, что посторонние частицы как бы выталкиваются растущими кристаллами, отодвигаясь от фронта их роста. При быстром охлаждении вследствие интенсивного роста кристаллов посторонние твердые частицы цементируются застывающим веществом.

Цементация посторонних частиц приводит к образованию небольших наростов на поверхности катода, которые, быстро разрастаясь, образуют шишки.

Образование губки, шишек, дендритов приводит к дальнейшему перераспределению тока на катоде. Это связано с изменением микрорельефа поверхности и развитием ее на этих участках, с увеличением ее физической неоднородности и соответственно с заметным уменьшением поляризации. В результате ухудшается качество полученного металла. Помимо того, быстро растущие дендриты и шишковидные наросты могут вызвать короткое замыкание ячейки.

Влияние микрорельефа на распределение тока может быть наглядно продемонстрировано следующими данными опыта [67]. Пять катодных пластин одинакового размера, вырезанных из одного листа меди, были помещены в прямоугольный электролизер так, что все они находились в одинаковых геометрических условиях, что обеспечивало равномерное распределение тока (данные об измерении тока на каждом электроде при токе 0,1 А, плотности тока 0,1 А/см² и 1 А/см² приведены в табл. 1).

медью, после чего в тех же условиях (при практически той же общей силе тока) был измерен ток на каждом электроде.

Как видно из табл. 5, ток на пластинках, покрытых губчатой медью, значительно превышал ток на гладких пластинках.

Таблица 5

Влияние микрорельефа на распределение плотностей тока*

Характеристика электродов	Среднее значение плотности тока $a/\text{дм}^2$	Распределение тока на пластинках составного электрода, $a/\text{дм}^2$				
		1	2	3	4	5
Поверхность всех электродов гладкая	0,124	0,125	0,124	0,124	0,123	0,123
Поверхность пластинок 2, 4, 5 гладкая; пластинки 1 и 3 покрыты губчатой медью . .	0,116	0,164	0,062	0,186	0,071	0,098

* Плотность тока рассчитана по видимой поверхности электрода.

Подобные же результаты были получены при измерении распределения тока на специальной модели пластинчатого прямоугольного электрода (рис. 67). При этом электроды 1 и 2 моделировали края электрода.

Вначале указанные электроды с одинаковой гладкой поверхностью покрывались медью в сернокислом электролите.

При этом средняя плотность тока на крайних электродах 1 и 2 была в 2,5 раза меньше, чем на среднем. Затем на электроды 1 и 2 осаждалась губчатая медь и вновь измерялся ток. Оказалось, что при этом соотношение плотностей тока резко изменилось. На электродах 1 и 2 плотность тока стала в 35 раз больше, чем на среднем электроде.

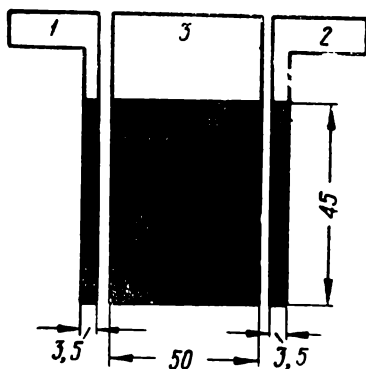


Рис. 67. Модель для измерения плотности тока на краях электрода

Влияние микрорельефа на распределение тока на поверхности катода может быть уяснено при рассмотрении модели, представляющей собой электролизер прямоугольной формы, в котором параллельно расположены анодная и две катодные медные пластинки (рис. 68). Поверхность одной из катодных пластин

тинок гладкая, а другая пластинка покрыта слоем губчатой меди.

Рассмотрим распределение тока на каждой из катодных пластинок. Так как размеры катодных пластинок значительно меньше расстояния между ними и анодом, то можно допустить, что на распределении тока на аноде влияние поля, создаваемого катодными пластинками, не скажется. В таком случае можно воспользоваться принципом наложения полей. В рассматриваемой модели равномерное поле плоского анода накладывается на

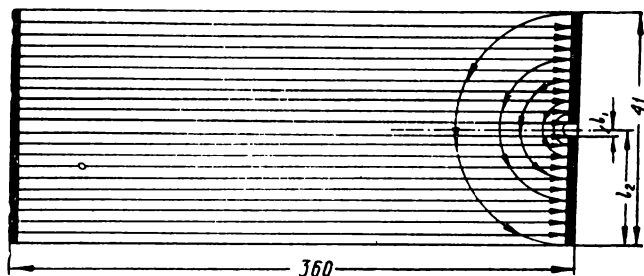


Рис. 68. К расчету распределения тока на участках катода с различной характеристикой микрорельефа

поле двух пластинок K_1 и K_2 , сходящихся под углом в 180° . Соответственно плотность тока на любом участке катода определится суммой плотностей токов, обусловленных двумя накладываемыми полями (допускаем, что силовые линии входят и выходят из электродов под прямым углом).

Составляющая плотности тока, обусловленная равномерным полем анода, на любом участке катода будет одинаковой.

Поле между двумя катодными пластинками создается из-за различия катодной поляризации на гладкой и губчатой поверхности, а следовательно, и из-за различия потенциалов.

Ток на участке катода dl , обусловленный полем катодов

$$dI = ihdl = \frac{\Delta\varphi}{\rho \frac{\pi l}{hdl}} = \frac{f(i_0 - i) + f_1(i_0 + i)}{\rho \frac{\pi l}{hdl}}, \quad (1)$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов между участками dl обоих катодов;

ρ — удельное сопротивление электролита;

πl — длина силовой трубки;

dl — ширина силовой трубки;

h — высота рабочей части электрода;

i_0 — составляющая плотности тока, обусловленная полем анода;

i — составляющая плотности тока, обусловленная полем

электродов K_1 и K_2 , которая на участке dl губчатого катода имеет положительное, а на корреспондирующем ему участке гладкого катода — отрицательное значение.

Плотность тока на участке dl губчатого катода будет равна $i_1 (i_0 + i)$ и потенциал $f_1 (i_0 + i)$ *. Плотность тока на участке dl гладкого катода соответственно будет равна $i_0 - i$ и потенциал $f (i_0 - i)$.

Если в первом приближении допустить, что в серноокислом медном электролите поляризуемость электрода пропорциональна плотности тока, т. е. $\varphi_k = b + ai$ (где b и a — постоянные), и что на губчатом электроде потенциал остается практически неизменным при изменении тока вследствие значительного развития поверхности и равным b , то выражение (1) преобразуется в

$$dI = \frac{|b + a(i_0 - i) - b| dl}{\rho \frac{\pi l}{h}} = ihdl; \quad i = \frac{ai_0}{\pi \rho l + a}. \quad (2)$$

Ток на катодах K_1 и K_2 , обусловленный их полем, будет равен:

$$I_k = \int_{l_1}^{l_2} ihdl = \int_{l_1}^{l_2} \frac{ai_0 h}{\pi \rho l + a} dl = \frac{ahi_0}{\pi \rho} \ln \frac{a + \pi \rho l_2}{a + \pi \rho l_1}. \quad (3)$$

Ток I_a на катодах, обусловленный равномерным полем анода, будет равен:

$$I_a = i_0 (l_2 - l_1) h. \quad (4)$$

Действительный ток на каждом катоде:

$$I_1 = I_a + I_k = i_0 h (l_2 - l_1) + \frac{ahi_0}{\pi \rho} \ln \frac{a + \pi \rho l_2}{a + \pi \rho l_1}; \quad (5)$$

$$I_2 = I_a - I_k = i_0 h (l_2 - l_1) - \frac{ahi_0}{\pi \rho} \ln \frac{a + \pi \rho l_2}{a + \pi \rho l_1}. \quad (6)$$

Соответственно средние значения плотности тока ¹ на каждом катоде:

$$i_1 = i_0 + \frac{ai_0}{\pi \rho (l_2 - l_1)} \ln \frac{a + \pi \rho l_2}{a + \pi \rho l_1}; \quad (7)$$

$$i_2 = i_0 + \frac{ai_0}{\pi \rho (l_2 - l_1)} \ln \frac{a + \pi \rho l_2}{a + \pi \rho l_1}. \quad (8)$$

Экспериментальная проверка формулы (3) показала сравнительно хорошее совпадение (учитывая принятые упрощающие допущения) расчетных и экспериментальных данных, достаточное для качественных выводов.

* Расчет ведется по кажущейся плотности тока.

¹ Плотность тока рассчитывалась по видимой габаритной поверхности электродов, без учета ее развития.

Как видно из формул (7) и (8), различие плотностей тока на участках катода с различным состоянием поверхности будет тем больше, чем меньше величина таких катодных участков, больше электропроводность и больше поляризация катода.

В заключение следует отметить, что влияние микрорельефа на распределение тока на электродах зависит от конфигурации поля. Так, если две катодные пластинки находятся на большом расстоянии друг от друга, то различие в плотностях тока, вызванное различным характером микрорельефа катодной поверхности, будет невелико и в ряде случаев может даже не учитываться. Если же участки катода или отдельные пластинки, отличающиеся по характеру поверхности, расположены рядом, то влияние микрорельефа сказывается значительно, что и должно быть учтено при разработке рациональной технологии.

Это относится не только к электрометаллургии, но и к гальваностегии. В частности, из всего сказанного вытекает недопустимость появления губчатых отложений, шишек и дендритов на подвесках, элементах контактных приспособлений, на металлических экранах и т. д. Если нельзя исключить возникновение губки или дендритов, то их следует систематически удалять, чтобы не допускать их разрастания, влекущего за собой резкое перераспределение тока.

ГЛАВА VIII

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОЛИЗЕРАХ

При протекании токов в электродах, электролите и токоподводящих шинах электролизеров возникают магнитные поля. Эти поля оказывают заметное влияние на работу современных мощных алюминиевых электролизеров.

Вследствие взаимодействия магнитных полей с токами, протекающими в электролите и расплавленном алюминии, появляются механические усилия, вызывающие временные или постоянные смещения металла и электролита, которые нарушают нормальный режим электролиза.

Протекание электрического тока в проводнике всегда сопровождается появлением магнитного поля.

Картина магнитного поля линейных токов совпадает с картиной электрического поля линейных зарядов, если эти заряды равномерно распределены в пространстве, с той, однако, разницей, что линии магнитного поля совпадают с линиями равного электрического потенциала, а линии равного магнитного потенциала совпадают с силовыми линиями электрического поля. Указанная аналогия, однако, ограничивается областями, в которых нет тока и которые не пересекают контуров с токами. В этом случае напряженность магнитного поля H , по аналогии с электрическим полем постоянных токов, равна градиенту магнитного потенциала:

$$H = |\text{grad } \varphi_m|. \quad (1)$$

Силовое магнитное поле, создаваемое током, текущим в линейном проводнике, представляет собой систему окружностей. Направление вектора напряженности магнитного поля в любой точке совпадает с направлением касательной, проведенной в указанной точке к окружности, представляющей собой силовые линии. Направление этих силовых линий образует праввинтовую систему с направлением токов (правило буравчика).

Напряженность магнитного поля бесконечного линейного проводника, по которому течет ток I , может быть определена из формулы:

$$H = 0,2 \frac{I}{r}, \quad (2)$$

где H — напряженность магнитного поля в эрстедах;

I — ток в амперах;

r — расстояние рассматриваемой точки поля от проводника.

Если внести в магнитное поле проводник, по которому протекает электрический ток, то проводник будет испытывать действие механической силы f . Эта сила перпендикулярна линейному проводнику и вектору магнитной напряженности. Для определения ее направления существует известное правило левой руки. Если ладонь левой руки повернуть так, чтобы четыре вытянутые пальца совпали с направлением тока, а магнитное поле входило в ладонь, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей на проводник.

Сила, действующая на помещенный в магнитное поле элементарный проводник длиной dl , по которому течет ток I , равна

$$df = \frac{1}{\mu} H I \sin \alpha dl, \quad (3)$$

где α — угол между направлением тока в проводнике и направлением вектора напряженности магнитного поля;

μ — магнитная проницаемость.

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad (4)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, равная $4\pi 10^{-9}$ ом · сек/см;

μ_r — относительная магнитная проницаемость среды.

Для ферромагнитных тел (железо, чугун, никель) μ_2 имеет большую величину. Для остальных тел μ_2 принимается равной единице.

Взаимодействие магнитного потока, возникающего при протекании тока в подводящих шинах, и токов, текущих в электролите и расплавленном алюминии, приводит к появлению силы, действующей как на электролит, так и на расплавленный алюминий.

Под влиянием возникающего усилия создается перекося расплавленного алюминия в электролизере, а также, как правильно предположил Мещеряков [68], циркуляция расплавленного алюминия и электролита, которые движутся к стороне анода, противоположной подводу тока.

Впоследствии Допрамаджи и Рудаков [72] подтвердили это предположение, изучив направление движения металла под электролитом методом меченых атомов. В процессе исследования радиоактивный изотоп кобальта — Co^{60} вводился в расплавленный металл у средней части торцевой стенки, расположенной возле анодных стояков. Затем по истечении 3, 6, 9, 12, 15, 20 минут отбирали пробы в различных точках по периферии электролизера и радиометрировали их. Результаты испытаний показали, что расплавленный металл действительно движется к стороне,

противоположной анодному стояку, причем потоки металла отвечают к боковым стенкам.

Металл передвигается с большей скоростью, чем электролит, так как при почти одинаковом удельном весе вязкость расплавленного алюминия примерно в четыре раза меньше. Перемещение горячего металла и электролита к боковым стенкам вызывает расплавление и размывание настелей (гарниссажа), в результате чего может оголиться боковая стенка и соответственно снизиться выход по току.

Перекок металла под влиянием силы f может достигать нескольких сантиметров. Непосредственные измерения, по данным Форсблома [70], показали, что уровень металла во входном торце электролизера, т. е. в месте расположения вертикальных анодных шин (стояков), обычно на 2—3 см ниже, чем в выходном торце. Наоборот, слой электролита оказывался толще во входном торце электролита. Сходные данные о форме поверхности расплавленного алюминия были получены Дограмаджи и Рудаковыми [72].

Согласно Форсблому, сила F , необходимая для создания перекоса z_0 , может быть рассчитана по формуле:

$$F = \frac{1}{2} z_0^2 b \Delta\gamma, \quad (5)$$

где b — ширина рабочего пространства электролизера;

$\Delta\gamma$ — разность удельных весов расплавленного алюминия и электролита.

Расчет показывает, что для того чтобы создать перекок металла в 2—3 см (при ширине рабочего пространства ванны 230 см) потребуется суммарная сила в 90—215 г.

Перекок расплавленного металла в электролизере приводит к значительному повышению катодных и анодных плотностей тока в зоне, где уровень металла повышен и где соответственно меньше междуэлектродное расстояние. Естественно, что в этой зоне электролит будет значительно перегрет, что в сочетании с уменьшенным междуэлектродным расстоянием приведет к понижению выхода по току.

Однако значительное различие плотностей тока будет отмечаться недолго. Уже спустя несколько дней после пуска электролизера, вследствие повышенной скорости сгорания анода в зоне повышенных плотностей тока подошва анода станет практически параллельной поверхности (зеркалу) расплавленного металла, что приведет к более равномерному распределению тока и выравниванию температур в электролите.

Чтобы избежать неравномерности распределения тока и температур в период пуска, Форсблом считает целесообразным с самого начала отрегулировать подъем анода так, чтобы у входного торца ванны он был поднят на 2—3 см.

Усилие, вызванное взаимодействием магнитных полей и

электрического тока в электролизере, приложенное к жидкому проводнику (расплавленному алюминию или электроду) длиной в 1 см и сечением 1 см², определится из выражения:

$$f = Hi \sin \alpha 10^{-7} = 0,2 \frac{I}{r} i \sin \alpha 10^{-7}, \text{ кг}, \quad (6)$$

где i — плотность тока, а/см²;

H — напряженность магнитного поля, эрстед;

α — угол между направлением магнитных силовых линий и линий тока.

Более точную формулу для расчета напряженности H магнитного поля тока, проходящего вдоль проводника конечной длины, вывели Дограмадж и Рудаков [72].

В соответствии с экспериментальным исследованием ток вдоль анодных и катодных шин убывает почти по линейному закону:

$$I = az + b, \quad (7)$$

где z — координата, идущая вдоль шины;

a и b — постоянные величины.

Поскольку элементы ошиновки обычно находятся на значительном расстоянии от расплавленного металла и электролита, можно пренебречь формой сечения шин и считать их линейными проводниками. В этом случае

$$H = \frac{a}{c} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + \frac{b + az_0}{l_0} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2), \quad (8)$$

где c — 3¹⁰ см/сек (в системе единицы cgs);

α_1 и α_2 — углы, под которыми видны концы проводника из точки наблюдения;

z_0 — координата точки наблюдения вдоль оси z , параллельной проводнику;

l_0 — расстояние от проводника до точки наблюдения (по перпендикуляру).

Как видно из (6), механическая сила, действующая на расплавленный алюминий и электролит, пропорциональна квадрату тока, проходящего через электролизер. Именно в связи с этим воздействие механических усилий на расплавленный металл было обнаружено лишь несколько лет назад в связи со значительным повышением токовой нагрузки в алюминиевых электролизерах.

Если в первом приближении посчитать шины, подводящие ток к алюминиевому электролизеру, линейными проводниками, то можно принять, что вокруг катодной шины, анодной шины и анодного стояка, изображенных на рис. 69, силовые линии магнитного поля образуют систему окружностей.

При схеме токоподвода, изображенной на рис. 69, вокруг катодной шины, анодной шины и анодного стояка образуются

магнитные поля, силовые линии которого представляют систему окружностей (если принять сделанное выше допущение).

Чтобы рассчитать усилие, действующее в некоторой точке m расплавленного алюминия (или электролита), следует сложить векторы сил, возникающих соответственно от взаимодействия магнитных полей анодной шины, анодного стояка и катодной шины с токами, текущими в расплавленном электролите:

$$F = f_1 + f_2 + f_3. \quad (9)$$

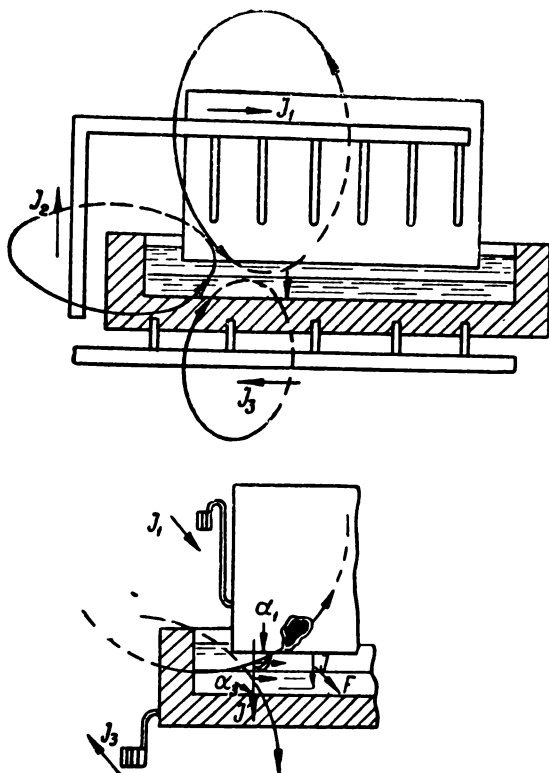


Рис. 69. Схема взаимодействия электрического и магнитного полей в алюминиевом электролизере (по С. М. Мещерякову)

Естественно, что если векторы f_1 , f_2 и f_3 будут совпадать по направлению, то сила F будет велика. Наоборот, если векторы f_1 , f_2 и f_3 будут направлены противоположно один другому, то равнодействующая F будет значительно меньше, и следовательно, меньше будет сказываться на работе электролизера взаимодействие магнитных и электрических сил.

Влияние магнитных полей, как показал Мещеряков [68], в большой мере зависит от типа ошиновки.

При односторонней системе подвода тока к катоду и аноду направления векторов напряженности магнитного поля анодной шины, анодного стояка и катодной шины совпадают (рис. 70). Следовательно, совпадает и направление механических сил, действующих на металл и электролит. В таком случае равно-

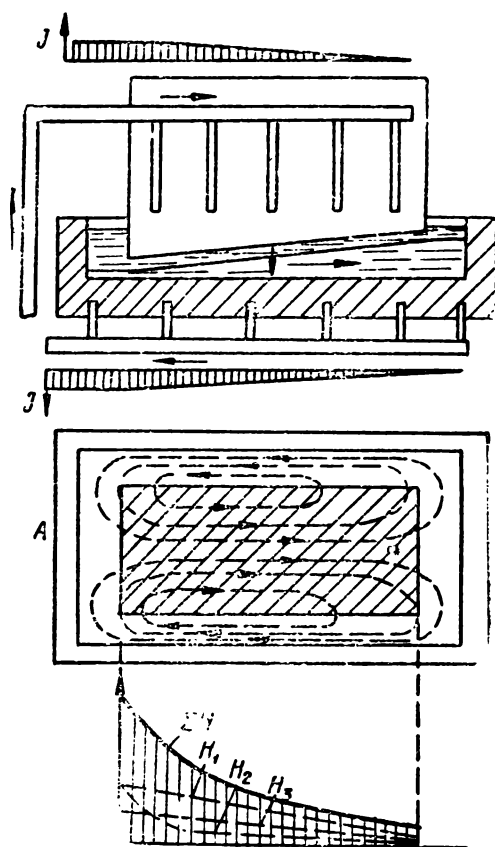


Рис. 70. Напряженность магнитного поля при односторонней системе подвода тока (по С. М. Мещерякову)

действующая F будет равна алгебраической сумме всех трех составляющих: $F = f_1 + f_2 + f_3$.

Усилие, действующее на расплавленный алюминий, будет изменяться вдоль электролизера вследствие изменения напряженности магнитного поля, что схематично изображено на рис. 70.

Напряженность магнитного поля анодного стояка $H_c = 0,2 \frac{I}{r}$ умень-

шается по длине электролизера в направлении от входного торца вследствие увеличения расстояния от стояка. Ток I остается величиной постоянной. На удвоенном расстоянии от стояка напряженность магнитного поля уменьшается в два раза, на утроенном расстоянии — в три раза и т. д. Так как длина ванны обычно намного превышает расстояние от анодного стояка до ближайшего края рабочего пространства ванны, то

H_c сравнительно быстро уменьшается с расстоянием.

Напряженность магнитного поля анодной шины уменьшается по длине ванны из-за постепенного уменьшения текущего в ней тока I , ответвляющегося к аноду. Если считать, что ток совершенно равномерно ответвляется к аноду, то можно принять, что его величина линейно изменяется по длине и также изменяется напряженность магнитного поля H_a . Все сказанное можно отнести и к напряженности магнитного поля катодной шины H_k . Следует оговорить, что такой характер изменения напряженности

магнитного поля имел бы место, если бы шины были бесконечно-длинными. Однако, так как их длина конечна, то максимум напряженности будет несколько смещен от входного торца к середине электролизера¹.

При разностороннем подводе тока (рис. 71) векторы напряженности магнитного поля анодной шины и анодного стояка направлены противоположно векторам напряженности катодной шины. В этом случае величина силы, приложенной в точке m к

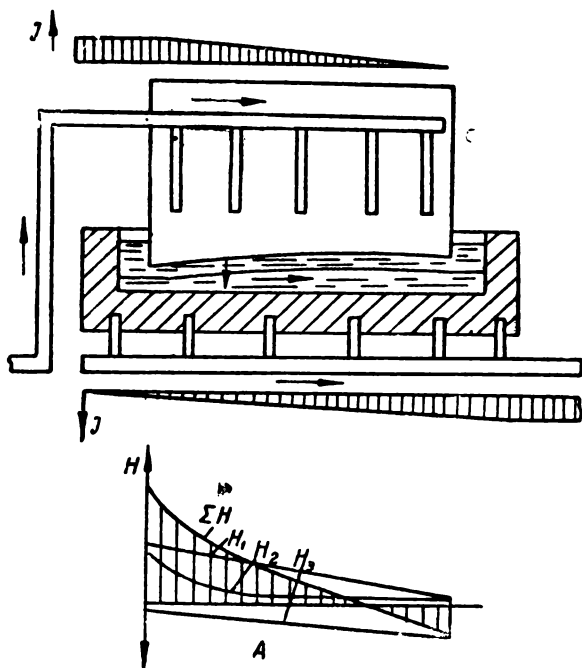


Рис. 71. Напряженность магнитного поля при разностороннем подводе тока (по С. М. Мещерякову)

расплавленному металлу, $F = f_1 + f_2 - f_3$. Естественно, что поскольку напряженности H_c , H_a и H_k будут изменяться по длине ванны, то будет изменяться и суммарная сила f .

Помимо ослабления суммарной напряженности магнитного поля, вызванного компенсирующим действием магнитного поля катодной шины, интенсивность циркуляции металла должна быть меньше благодаря возникновению встречного усилия (см. рис. 71). Поэтому такая система подвода тока способствует нормализации работы алюминиевых электролизеров.

Еще более ослаблено действие магнитных полей при подводе тока к аноду и катоду с обеих сторон электролизера (рис. 72).

¹ Если бы ток в анодных и катодных шинах не изменялся по длине ванны, то максимум напряженности был бы точно в середине ванны.

Тогда противоположно направленные усилия возникают у противоположных торцов ванны, уменьшаясь до нуля к середине.

При такой системе подвода тока целесообразно катодную шину поднять до уровня электролита. При таком ее расположении горизонтальная составляющая вектора напряженности маг-

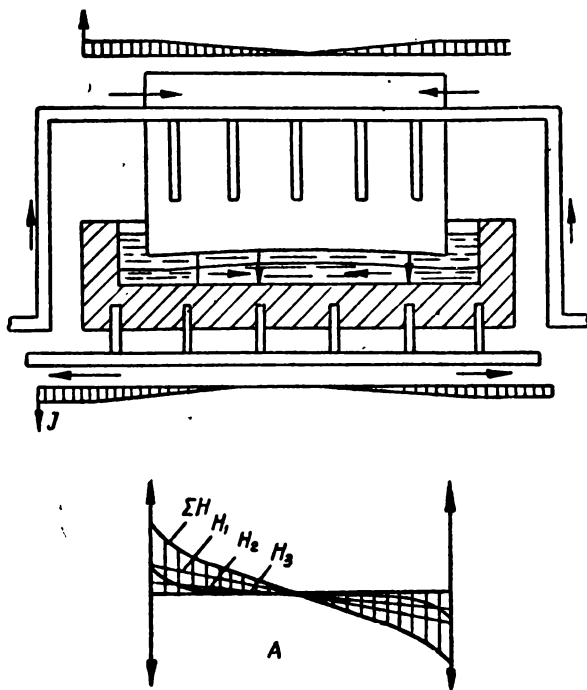


Рис. 72. Напряженность магнитного поля при подводе тока к катоду и аноду с обеих сторон электролизера (по С. М. Мещерякову)

нитного поля катодной шины равна нулю и, следовательно, сила f_3 также равна нулю.

При разностороннем подводе тока к аноду и катоду нецелесообразно поднимать катодную шину до уровня электролита, так как это приведет к уменьшению или полному исключению компенсирующего действия магнитного поля катодной шины.

При всех системах подвода тока для уменьшения влияния магнитных полей внешние проводники тока (шины) целесообразно располагать возможно дальше и уменьшать величину тока в них, увеличивая число точек подвода тока.

Для ослабления влияния магнитного поля ошиновки целесообразно применять экранирование. Так, по данным Влейгеля [61] железное днище благодаря экранирующему влиянию ослабляет магнитное поле катодной шины. Можно несколько умень-

шить влияние магнитного поля анодной шины, расположив стальное подвесное устройство под шинами (т. е. между анодной шиной и электролизером).

Рассмотренная выше схема действия возникающих электромагнитных сил далеко не исчерпывает всей сложности взаимодействия магнитных и электрических полей в алюминиевом электролизере. Неравномерное распределение тока и различие направлений тока в электролите вызывает неравномерное распределение сил смещения.

Наличие горизонтальных составляющих тока в расплавленном алюминии порождает значительную неравномерность распределения давления в металле и в соседних участках электролита. Такая неравномерность может вызвать местные искривления и вспучивание металла.

Токи различных направлений в угольном электроде, расплавленном металле и электролите, особенно значительные горизонтальные токи в расплавленном алюминии, вызывают появление «внутреннего» магнитного поля [69].

Существенные осложнения вносят также периодически происходящие изменения величины тока в серии электролизеров, вызываемые анодными эффектами и изменениями междуэлектродного расстояния при выпуске алюминия или перемещениях анода. Изменения тока влекут за собой изменения давления и в результате появление волны в объеме металла, которая будет затухать не сразу, многократно отражаясь от стен электролизера. Подобное волнообразное или пульсирующее движение в объеме металла в обжигаемых на металле ваннах наблюдал Форсблом [70].

Измерения, проведенные Дограмаджи и Рудаковым [72] контактным методом, также установили непрерывное волнение металла под электролитом.

Изменение тока во времени в серии приводит к соответствующему изменению величины магнитного потока, сопровождаемому появлением электрического поля вихревого характера. Это еще в большей степени осложняет взаимодействие полей.

Волнообразное движение расплавленного металла при малом междуэлектродном расстоянии может вызвать периодические короткие замыкания. В частности, Форсблом [70] описал периодические колебания напряжения на ванне при малом междуэлектродном расстоянии. В момент резкого спада напряжения отмечалось прекращение выделения газов из рабочего пространства ванны, что могло явиться только следствием резкого уменьшения скорости или прекращения электрохимического процесса, вызванного коротким замыканием при соприкосновении расплавленного металла с анодом.

В связи со сказанным представляются целесообразными указания Форсблома о необходимости такого регулирования электрического режима серии, которое бы обеспечивало постоянство

тока, что позволило бы полностью устранить все осложнения, связанные с нерегулярным токовым режимом.

В недавно опубликованном исследовании Рубин [74] обратил внимание на то, что при движении потоков расплавленного металла в неравномерном магнитном поле в движущемся металле возникает обратная электродвижущая сила движения

$$E_{\text{дв}} = Hlv 10^{-8}, \quad (10)$$

где v — скорость движения, см/сек;

H — напряженность магнитного поля, эрст;

I — ток, а.

Рассматривая две параллельные цепи тока в электролизере — одну в зоне магнитного поля очень слабой интенсивности и другую в зоне значительно более сильного магнитного поля, Рубин получил формулу для расчета динамического напора p , вызывающего смещение металла:

$$p = \frac{(IR_1 - Hlv 10^{-8}) 0,1 H}{v (R_1 + R_2)}, \quad (11)$$

где R_1 и R_2 — сопротивления участков цепи соответственно в зоне слабой и большой интенсивности магнитного поля;

l и v — размеры в направлении действия тока и магнитного поля соответственно.

Выражение (11) показывает, что существует некоторое экстремальное значение H , при котором достигается максимальное значение p . Однако практически значение H в электролизере намного меньше экстремального.

Помимо того, из (11) видно, что давление p тем меньше, чем меньше сопротивление участков, находящихся в зоне слабого поля, и чем больше размеры электролизеров.

Описанные явления при электролитическом получении алюминия требуют дальнейшего пристального изучения, которое бы позволило устранить все ненормальности в технологическом процессе, вызванные взаимодействием магнитных и электрических полей.

НАЛОЖЕНИЕ МАКРО и МИКРОПОЛЕЙ ПРИ ЦЕМЕНТАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ

При переработке растворов, бедных по содержанию меди (до 15 г/л), применяется способ цементации ее железным скрапом. При этом медь получается в виде губчатого осадка. Содержание ее в осадке колеблется в широких пределах (от 25 до 96%) в зависимости от содержания меди в растворе, характера применяемого для цементации скрапа, аппаратного оформления процесса и т. д. В дальнейшем цементная медь перерабатывается в конвертерах.

При исследовании механизма контактного осаждения меди на железе мы обнаружили, что при погружении в электролит железной пластинки совместно с находящейся с ней в электрическом контакте медной пластинкой наблюдалось улучшение внешнего вида медного осадка. Благодаря интенсивной работе микрогальваноэлементов при контактном осаждении на железе обычно отлагалась губчатая медь красно-бурого цвета. При погружении железа в контакт с медью наряду с микроэлементами возникал макроэлемент железо-медь. При этом анодные участки (железо) одновременно работали в системе микроэлемента и короткозамкнутого макроэлемента железо-медь.

При таком совместном погружении пластин отношение суммарного тока к току макроэлемента составляло 2,0—2,4. Соответственно на медной пластинке осаждалось ~45% всей меди в виде плотного компактного осадка. Это дает основание указать на возможность извлечения меди из растворов в компактной форме. Для этого в желоба, ванны или другие емкости для осаждения меди наряду и в контакте с железным скрапом следует помещать медные листы.

В такой системе наряду с микроэлементами $\text{Fe} \left| \begin{array}{c} \text{CuSO}_4 \\ \text{H}_2\text{SO}_4 \end{array} \right| \text{Cu}$ будут работать такие же макроэлементы и соответственно наряду с губчатой медью, осаждающейся на железе, на медных листах будет осаждаться компактная медь.

Компактная медь, осаждающаяся на медных пластинах, совершенно свободна от гидратов окислов и основных сернокислых солей железа, от металлического железа и других примесей, в значительной мере загрязняющих губчатую медь. Поэтому компактная медь, минуя конвертер и, по-видимому, первое огне-

вое (анодное) рафинирование, может непосредственно направляться на электролитическое рафинирование.

Для выяснения факторов, влияющих на процент извлечения меди в компактной форме, мы (совместно с В. Швецом) провели эксперименты в масштабах лаборатории, позволяющие сделать некоторые качественные выводы.

Весьма существенным фактором оказалось отношение поверхности железа S_{Fe} к поверхности меди S_{Cu} . Так, при отношении

$\frac{S_{Cu}}{S_{Fe}} = 6,3$ количество извлеченной меди в компактной форме (в растворе, содержащем 15 г/л $CuSO_4 \cdot 5H_2O$) составляло 60,8%.

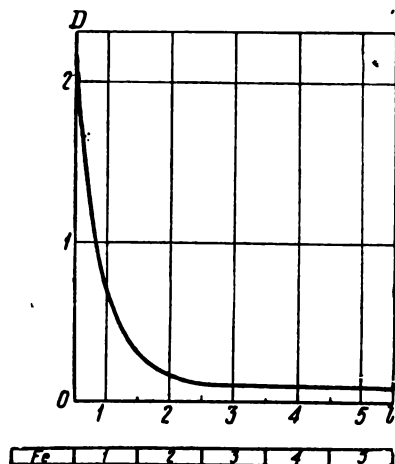


Рис. 73. Кривая распределения тока на медных пластинках (D — плотность тока; l — расстояние от железной пластинки)

Расположение пластинок показано в нижней части рисунка: Fe — железная пластинка; 1, 2, 3, 4, 5 — медные пластинки

При $\frac{S_{Cu}}{S_{Fe}} = 3,1$ процент компактной меди в тех же условиях со-

ставлял 48,8, а при $\frac{S_{Cu}}{S_{Fe}} = 1,3$ только 29,9. Имеет значение также

взаимное расположение железных предметов и медных листов. Чем равномернее располагаются железные предметы (скрап) относительно медных листов, тем больше процент компактной меди. Это легко объясняется тем, что основную нагрузку будут нести участки медных листов, находящиеся вблизи железных предметов. Остальная же часть поверхности будет мало нагруженной, что наглядно демонстрируется нашими опытами.

Одна железная и пять медных короткозамкнутых пластинок одинакового размера помещались так, как показано на рис. 73. Как видно из графика, количество меди, осажденной на пластинке 1, расположенной в непосредственной близости от железной пластинки, превышало в два раза количество меди, осажденной на остальных четырех пластинках.

Процент компактной меди был тем больше, чем меньше была

концентрация меди и чем больше концентрация свободной серной кислоты. Так, при одинаковых условиях опыта из раствора, содержавшего 7,5 г/л $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ и 1 г/л H_2SO_4 , осаждалось 48% компактной меди, а из такого же раствора с 2 г/л H_2SO_4 — 53,5%.

При концентрации $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ 30 г/л (отношение $\frac{S_{\text{Cu}}}{S_{\text{Fe}}} = 6,3$) было извлечено 41,7% компактной меди, а в тех же условиях при концентрации $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ 15 г/л — 60,8%. В иных условиях опыта ($\frac{S_{\text{Cu}}}{S_{\text{Fe}}} = 3,1$) из раствора, содержащего 30 г/л $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$

осаждалось 33,6% компактной меди, а из раствора с содержанием 15 г/л $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ — 48,8%. Таким образом следует ожидать, что для более бедных медью растворов процент компактной меди будет больше. Отмеченное влияние концентрации серной кислоты и серноокислой меди в растворе объясняется следующим.

Процесс осаждения меди на губчатую медь (на поверхности железа) вследствие малого сопротивления электролита в микроэлементах контролируется в основном катодной поляризацией. С ростом концентрации серной кислоты и уменьшением концентрации меди в растворе повышается катодная поляризация и соответственно уменьшаются ток в микроэлементах и количество осевшей меди. Процесс осаждения меди на медных пластинках в основном контролируется сопротивлением электролита. С повышением концентрации серной кислоты сопротивление электролита уменьшается и соответственно увеличиваются ток и количество осажженной меди на медных пластинах.

Наши опыты показали, что осадки меди на медных пластинах сохраняют компактную форму вплоть до полного извлечения меди из раствора. Это связано с «саморегулированием» скорости процесса. По мере уменьшения концентрации меди в растворе параллельно происходит уменьшение плотностей тока на катодных участках, уменьшается скорость процесса. Контролирующим фактором, особенно при малых концентрациях меди, оказывается диффузия.

В заключение укажем, что предложенный нами способ извлечения меди в компактной форме может найти применение также в машиностроительных предприятиях для извлечения меди из отработанного «отбела»¹, из растворов для разлатунирования и т. д.

По-видимому, способ частичного осаждения металла в компактной форме при цементации может найти применение в других цементационных процессах (при извлечении золота, серебра и др.).

¹ «Отбел» — травильный раствор для снятия окислов с меди и ее сплавов.

В реальных условиях процесса цементации процент осаждения меди или других металлов в компактной форме может оказаться более низким, чем в наших опытах. Но даже и при извлечении 10—20% металла в компактной форме предложенный способ окажется выгодным, так как не потребует никаких дополнительных затрат, кроме стоимости загрузочного устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Беляев, *Металлургия легких металлов*, Металлургиздат, 1949.
2. Ю. В. Баймаков, *Электролиз в металлургии*, т. I, Металлургиздат, 1939.
3. В. А. Говорков, *Электрические и магнитные поля*, Связьиздат, 1951.
4. Л. Р. Нейман, П. Л. Калантаров, *Теоретические основы электротехники*, ч. III, Госэнергоиздат, 1948.
5. В. П. Машовец, Г. В. Форсблом, К вопросу о балансе напряжения электролизера, *Журнал прикладной химии*, 1949, т. 22, I, 1083.
6. Г. В. Форсблом, В. П. Машовец, Зависимость величины электрохимической и омической составляющей падения напряжения в электролитической ячейке от ее геометрии. *Журнал прикладной химии*, 1953, т. 24, в. 10, 1020.
7. В. П. Машовец, Г. В. Форсблом, О роли геометрических факторов в так называемой рассеивающей способности гальванических ванн, *Журнал прикладной химии*, 1952, т. 25, в. 5, 532.
8. В. П. Машовец, Г. В. Форсблом, О распределении электрического поля постоянного тока в электролизерах, *Журнал физической химии*, 1952, т. 26, № 10, 1389.
9. Л. И. Каданер, К вопросу о рассеивающей способности электролитов, *Журнал физической химии*, 1955, т. 29, в. 5, 832.
10. В. Г. Левич, *Физико-химическая гидродинамика*, Издательство АН СССР, 1952.
11. Г. В. Форсблом. О распределении электрического поля постоянного тока в электролизерах. Графический метод построения поля, *Журнал физической химии*, 1953, т. 27, в. 3, 321.
12. П. В. Мелентьев, Экспериментальный метод построений линий тока плоского потенциального потока, *Изд. Ленинградского университета*, 1939.
13. Г. П. Корбут, Метод определения линий равного потенциала, *Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина*, 1955, № 181, 84.
14. П. М. Егоров, Экспериментальное исследование потенциальных полей посредством конформно-преобразованных моделей, *Электричество*, 1954, № 3, 6.
15. H. L u k e n s, Mechanism of Conductivity, *Transactions of the American Electrochemical Society*, 1937, v. 67, 29.
16. П. П. Федотьев, А. И. Евстюхин, К теории рассеивания тока в гальванической ванне, *Журнал общей химии*, 1942, т. 12, в. 1, 12.
17. В. П. Машовец, Построение электрического поля в растворах как метод электрохимического исследования, *Труды второй всесоюзной конференции по теоретической и прикладной электрохимии*, Изд. АН УССР, 1949, 230.
18. Н. В. Гудин, К вопросу о методике изучения электрического поля в электролизерах. *Труды Казанского химико-технологического института им. С. М. Кирова*, 1956, в. 21, 91.

19. J. Steiner, Eine Methode zur Bestimmung der Katodischen Strom- und Metallverteilung in galvanischen Elektrolyten, Archiv für technisches Messen, 1951, I, v. 8227—2, т. 6—7.

20. Л. И. Каданер, Упрощенные методы определения рассеивающей способности и оптимальных технологических параметров гальванических ванн, Научные записки Харьковского института советской торговли, 1951, в. 2, 207.

21. В. А. Говорков, Расчет электрических и магнитных полей по методу потенциальной сетки, Электричество, 1949, № 3, 52.

22. В. А. Говорков, Расчет электрических и магнитных полей в полярных координатах по методу потенциальной сетки, Электричество, 1951, № 7, 51.

23. Ch. Kasper, The Theory of the Potential and the Technical Practice of Electrodeposition, Transactions of the Electrochemical Society, 1940, v. 77, 353; 1940, v. 77, 365; 1940, v. 78, 131; 1940, v. 78, 147; 1942, v. 82, 153.

24. Ch. Kasper, Current Distribution in Electrodepositions, The Monthly Review of American Electroplaters Society, 1939, I, 11; 1939, II, 91.

25. А. Н. Фрумкин, О распределении коррозионного процесса в трубке, Журнал физической химии, 1949, т. 23, в. 12, 1477.

26. В. Г. Левич, А. Н. Фрумкин, Омическое сопротивление локальных элементов при растворении металлов в кислотах, Журнал физической химии, 1941, т. 15, в. 6, 748.

27. C. Wagner, Theoretical Analysis of the Current Density Distribution in Electrolytic Cells, Journal of the Electrochemical Society, 1951, v. 98, № 3, 116.

28. C. Wagner, Contribution to the Theory of Cathodic Protection, I, Journal of the Electrochemical Society, 1952, v. 99, № 1, 1.

29. Ch. Tobias, R. Wijnsman, Theory of the Effect of Electrode Resistance on Current Density in Electrolytic Cells, Journal of the Electrochemical Society, 1953, v. 101, № 10, 459.

30. S. Ishizaka, H. Matsuda, Current Distribution in Electrolytic Cells, p. 4, Journal of the Electrochemical Society Japan, 1951, v. 19, № 3, 89.

31. S. Ishizaka, H. Matsuda, I. Wada, Current Distribution in Electrolytic Cells, p. 7, Journal of the Electrochemical Society Japan, 1954, v. 22, № 8, 420.

32. J. Weber, Mathematical Studies of Galvanic Corrosion, I, Journal of the Electrochemical Society, 1954, v. 101, № 6, 271.

33. J. Weber, M. Rosenbluth, Mathematical Studies of Galvanic Corrosion, II, Journal of the Electrochemical Society, 1955, v. 102, № 6, 344.

34. J. Weber, Mathematical Studies of Galvanic Corrosion, III, Journal of the Electrochemical Society, 1955, v. 102, № 7, 420.

35. J. Weber, B. Fagan, Mathematical Studies of Galvanic Corrosion, IV, Journal of the Electrochemical Society, 1956, v. 103, № 1, 64.

36. J. Weber, J. Ruth, Mathematical Studies of Galvanic Corrosion, V, Journal of the Electrochemical Society, 1956, v. 103, № 2, 138.

37. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1951.

38. В. Смайт, Электростатика и электродинамика, Изд. иностранной литературы, 1954.

39. Л. И. Каданер, Расчет распределения тока на электродах при помощи конформных отображений, Журнал физической химии, 1956, т. 30, в. 8, 1760.

40. Л. И. Каданер, Аналитический метод расчета распределения тока на электродах, Журнал физической химии, 1956, т. 30, в. 7, 1560.

41. Л. И. Каданер, Условия подобия электрохимических систем. Научные записки Харьковского института советской торговли, 1957, в. 6, 261.

42. Г. В. Форсблом, В. П. Машовец, Об условиях моделирования электрического поля электролизеров. Доклады АН СССР, 1953, т. 91, № 3, 593.

43. П. С. Титов, Н. В. Минскер, Т. Д. Молдавер, Электролитический биметалл. Технология цветных металлов и сплавов, Московский институт цветных металлов и золота им. М. И. Калинина, Сб. 83—96, 1946.
44. А. И. Левин, М. А. Лошкарев, Новый режим цианистого меднения в производстве биметалла. Электролиз в металлургии и гальванотехнике, Труды Уральского индустриального института им. С. М. Кирова, 1947, Сб. 27, 96.
45. П. С. Титов, Н. В. Минскер, Т. Д. Молдавер, Получение биметалла железо—свинец в процессе электролитического рафинирования свинца. Технология цветных металлов и сплавов, Московский институт цветных металлов и золота им. М. И. Калинина, 1947, сб. 18, 159—169.
46. П. М. Лукьянов, В. В. Белостоцкая, Электролитическое цинкование листового железа, Сталь, 1941, № 5, 37.
47. Л. И. Балабуха, Математический расчет некоторых полей электростатики, Теоретическая и экспериментальная электротехника, 1932, № 1—2, 4.
48. F. Nine, S. Joshizawa, S. Okada, Effect of the Walls of Electrolytic Cells on Current Distribution, Journal of the Electrochemical Society, 1956, v. 103, № 3, 186.
49. Л. И. Каданер, В. М. Цукерник, Распределение тока на плоских параллельных электродах, Журнал физической химии, 1957, т. 31, в. 10, 2253.
50. В. И. Смирнов. Расчет сопротивления между электродами в некоторых потенциальных полях, Электричество, 1953, № 9, 55—61.
51. Ю. С. Сикорский, Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ НКТП, 1936.
52. Л. И. Каданер. Вопросы распределения тока и металла на электродах, Научные записки Харьковского института советской торговли, 1956, в. 5, 165.
53. А. В. Нетушил, Расчет сопротивлений между электродами при электропрогреве бетона и железобетона, Вестник инженеров и техников, 1947, № 6, 208.
54. Г. А. Абрамов, М. М. Ветюков, И. П. Гупало, А. А. Костюков, Л. Н. Ложкин, Теоретические основы электрометаллургии алюминия, Металлургияздат, Москва, 1953.
55. Г. С. Аронзон, Известия энергетического института им. Г. М. Кржижановского, АН СССР, 1938, 7, 53.
56. В. П. Машовец, В. В. Чердынцева, И. В. Неуструева, Сопротивление электролита в ванне в зависимости от формы, размеров и расположения электродов, Журнал прикладной химии, 1947, т. 20, в. 7, 660.
57. В. П. Машовец, Н. В. Потоцкая, Н. Л. Комаров, У. Ф. Туромшина, Влияние геометрических параметров электролизера на распределение в нем электрической энергии, Журнал прикладной химии, 1951, т. 24, в. 2, 154.
58. Г. В. Форсблом, В. П. Машовец, Расчет падения напряжения в электролизерах для получения алюминия, Журнал прикладной химии, 1952, т. 25, № 11, 1165.
59. М. А. Коробов, Влияние ширины анода алюминиевого электролизера на температурное и электрическое поля, Цветные металлы, 1957, № 2, 52.
60. М. А. Коробов, Распределение тока в электродах алюминиевого электролизера, Цветные металлы, 1957, № 1, 49.
61. J. Wleugel, Forze elettromagnetici nei grandi forni per l'alluminio, Aluminio (итал.), 1953, 22, в. 6, 759.
62. A. Weiselberg, Distribution of Current along a Cylindrical Anode Inside of a Concentric Tube, Transactions of the American Electrochemical Society, 1946, v. 90, 225.
63. J. Waber, Discussion, Transactions of the American Electrochemical Society, 1946, v. 90, 243.
64. В. П. Машовец, Влияние непроводящих включений на электропроводность электролита, Журнал прикладной химии, 1951, т. 24, в. 4, 353.

65. I. Runge, Zur elektrischen Zeitfähigkeit metallischer Aggregate, Zeitschrift für technische Physik, 1925, № 2, 61.

66. П ф л е й д е р е р, Электролиз воды, ОНТИ, 1935.

67. Л. И. Каданер, Влияние микрорельефа на распределение тока на электродах, Журнал прикладной химии, 1957, т. 30, № 1, 72.

68. С. М. Мещеряков, О влиянии магнитных полей ошиновки на работу электролизных ванн, Цветные металлы, 1955, № 6, 29.

69. R. Jötten, Campi magnetici nei grandi forni per l'elettrolisi dell'aluminio e loro azione, Alluminio (итал.), 1953, 22, № 6, 751.

70. Г. В. Форсблом, Некоторые случаи влияния электромагнитных полей на работу алюминиевого электролизера, Цветные металлы, 1956, № 3, 63.

71. Л. И. Каданер, Контактное осаждение меди на железе, Украинский химический журнал, 1951, т. 17, в. 2, 224.

72. М. Ф. Дограмаджи, В. Н. Рудаков, Магнитное поле и состояние поверхности расплавленного металла в электролизной ванне, Цветные металлы, 1957, № 5, 50.

73. Л. И. Каданер, Распределение тока в щели и цилиндрическом отверстии при одновременной работе внешней плоской поверхности анода, Журнал физической химии, 1957, т. 31, в. 9, 2087.

74. В. И. Рубин, Приближенный анализ результатов взаимодействия токов и магнитного поля в алюминиевых электролизерах, Цветные металлы, 1958, № 8, 53.

Автор

КАДАНЕР Лев Ильич

Ответственный редактор *В. М. Цукерник*

Редактор издательства *Е. К. Синявская*

Техн. редактор *С. П. Андреев*

Корректор *Ю. П. Рябко*

Сдано в производство 26/XII 1958 г. Подписано к печати 22/IV 1959 г.

Формат бумаги $60 \times 92 \frac{1}{16} = 5,13$ бум. л. = 10,25 печ. л. Уч.-изд. л. 9,63

Т-04543 Заказ 1027 Тираж 2700 Цена 4 р. 80 к.

Металлургиздат

Москва, Г-34, 2-й Обыденский пер., д. 14

Типография Металлургиздата, Москва, Цветной бульвар, 30

ЗАМЕЧЕНИЯ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
58	Подпись к рис. 18	b) $\frac{1}{H} = \frac{2}{\pi} = 0,64;$	b) $\frac{1}{H} = \frac{2}{\pi} = 0,64;$	Тип.
67	1 стр.	в параметрической формуле.	в параметрической форме.	Кор.
69	15 стр.	потенциалом ,	потенциалом ψ_0 ,	Тип.
74	7 стр.	между электродами.	в теле электродов.	Авт
74	5 стр.	$-\Phi_{n_1} =$	$\Phi_m - \Phi_{n_1} =$	Тип
82	3 стр.	$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \times \alpha$	$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \alpha$	Изд
88	1 стр.	$i_{\text{мн}} \left(i \frac{ds}{dG_0} - h_0 \right)$ $i_i = \frac{l \frac{ds}{dG_0} + h}{l \frac{ds}{dG_0} + h}$	$i_{\text{мн}} \left(l \frac{ds}{dG_0} + h_0 \right)$ $i_i = \frac{l \frac{ds}{dG_0} + h_i}{l \frac{ds}{dG_0} + h_i}$	Авт
122	13 стр.	коаксиальным цилиндром,	коаксиальными цилиндрами.	
145	4 и 5 стр.	будет равна $i_1 (i_0 + i)$	будет равна $i_0 + i$	

~~4 p. 80 k.~~

Л. У. Каданер



ЛЕКТРИЧЕСКИЕ
ПОЛЯ
В ЭЛЕКТРОЛИЗЕРАХ

Металлургиздат

1

9

5

9